Universidad Nacional de Asunción

Facultad de Ingeniería

Ingeniería Electrónica

Ingeniería Electromecánica

Trabajo Final de Grado

“Simulación 3D del transitorio térmico de circuitos electrónicos y control no lineal de temperatura por medio de métodos variacionales”

Carlos Antonio Galeano Ríos

Mauricio José Poletti Merlo

Contenido

- Motivación y relevancia del trabajo
- Objetivos y Alcance
- Modelado y discretización
- Simulación
- Resultados de la simulación
- Control óptimo
- Resultados del control óptimo
- Otros desarrollos parciales
- Conclusiones y trabajos futuros

Contenido

- **Motivación y relevancia del trabajo**
- Objetivos y Alcance
- Modelado y discretización
- Simulación
- Resultados de la simulación
- Control óptimo
- Resultados del control óptimo
- Otros desarrollos parciales
- Conclusiones y trabajos futuros

EL PROBLEMA DEL CALENTAMIENTO

Fallas en equipos electrónicos

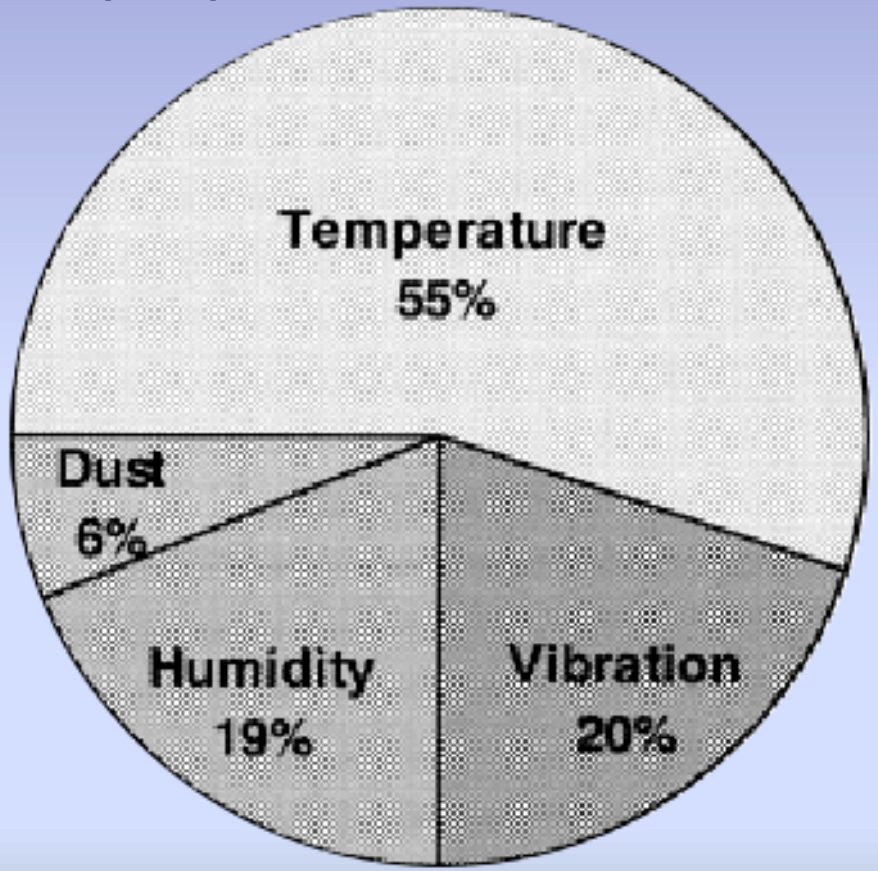
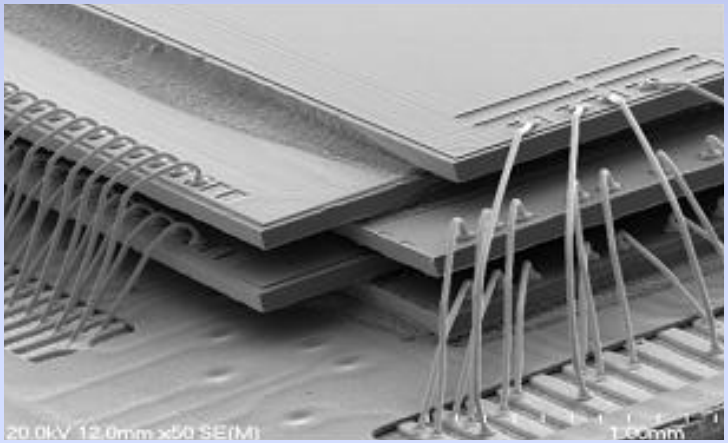


Figura extraída de Art. Modelling electronic circuit radiation cooling using analytical thermal model. Autores: M. Janicki y Marcin Napieralski

EL PROBLEMA DEL CALENTAMIENTO

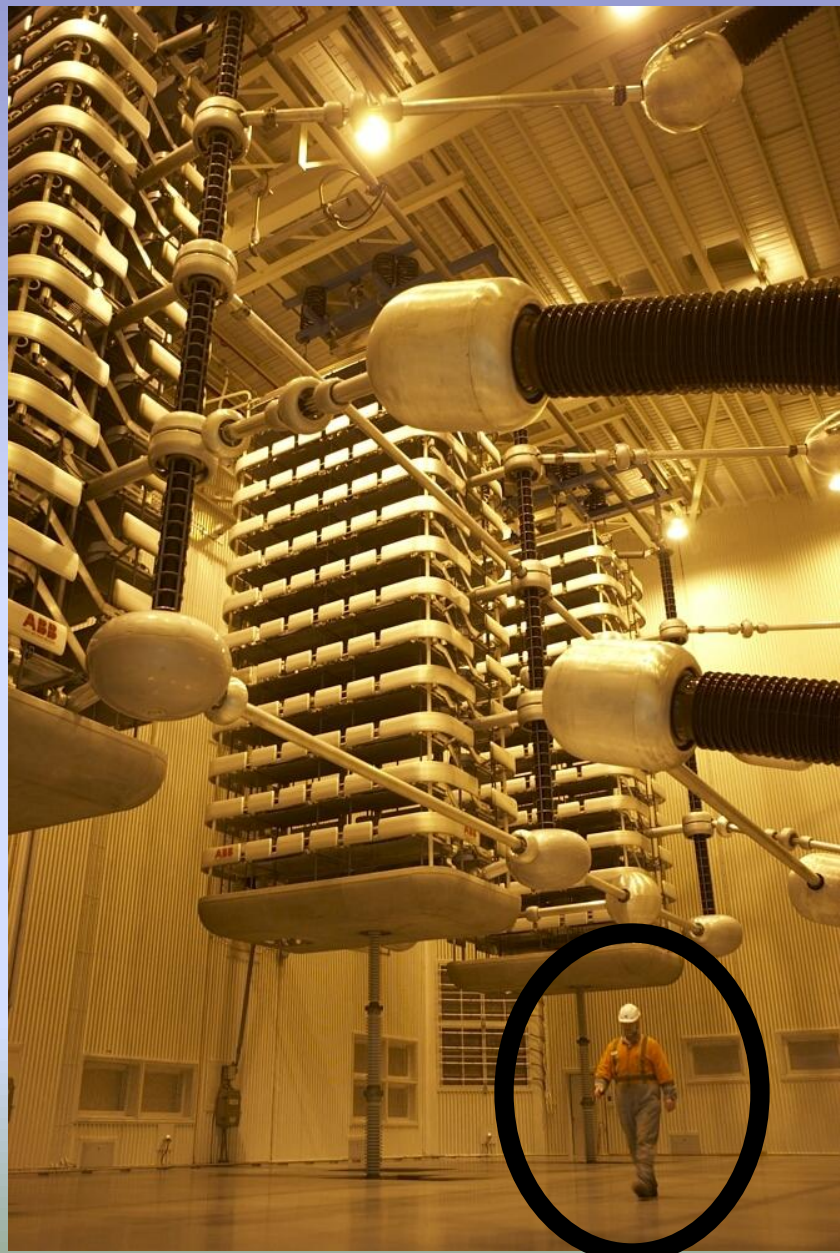
Creciente compactación de equipos



Imágenes extraídas del ITRS 2007

EL PROBLEMA DEL CALENTAMIENTO

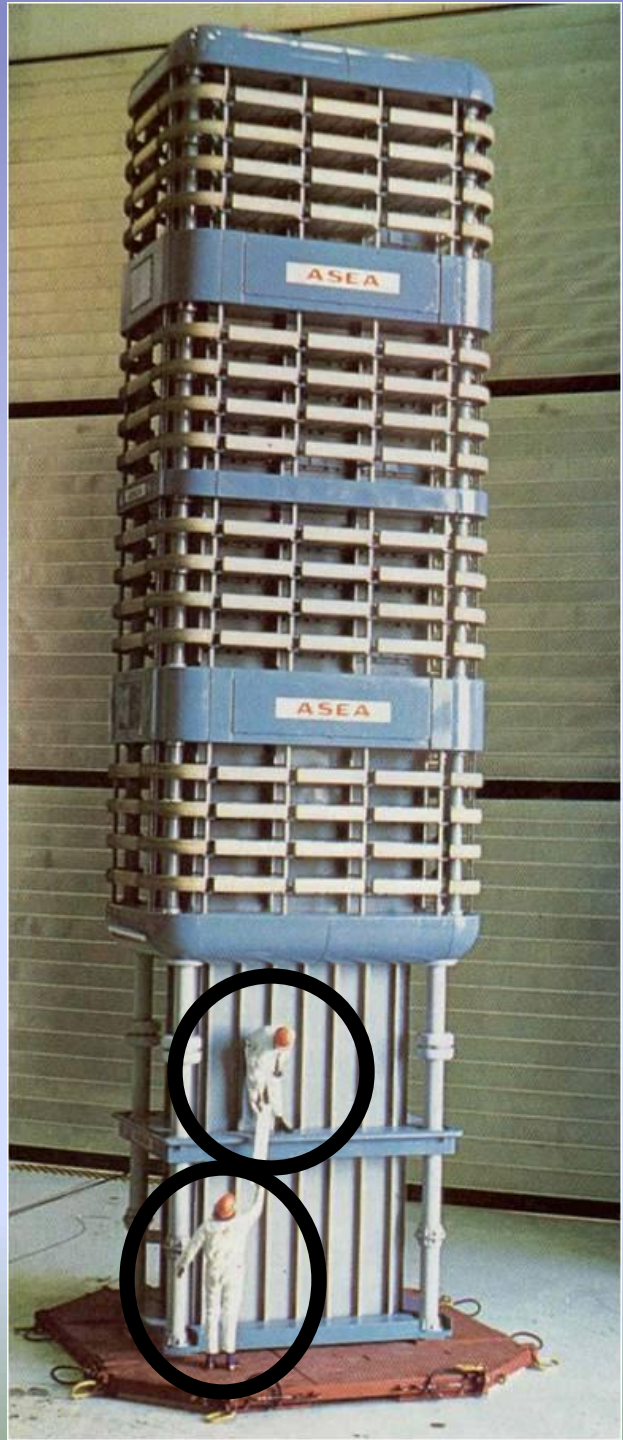
Electrónica
de
potencia



Tiristores en sistema HVDC en Nueva Zelanda

EL PROBLEMA DEL CALENTAMIENTO

Electrónica
de
potencia



SCR de un inversor en sistema de transmisión

EL FUTURO DE LA ELECTRÓNICA

ITRS: International Technology Roadmap for Semiconductors

- Es elaborado por **un grupo de expertos** mundiales en el área de **semiconductores**.
- Pretende marcar las más importantes **líneas de investigación** en el área para los siguientes 10 o hasta 15 años.
- Desarrolla una **serie de ítems** según los temas más importantes para la **investigación y desarrollo.**

EL FUTURO DE LA ELECTRÓNICA

ITRS - Temas

- System Drivers/Design
- Test & Test Equipment
- Front End Processes
- Photolithography
- IC Interconnects
- Factory Integration
- Assembly & Packaging
- Environment, Safety & Health
- Yield Enhancement
- Metrology
- Modeling & Simulation
- Emerging Research Devices
- Emerging Research Materials

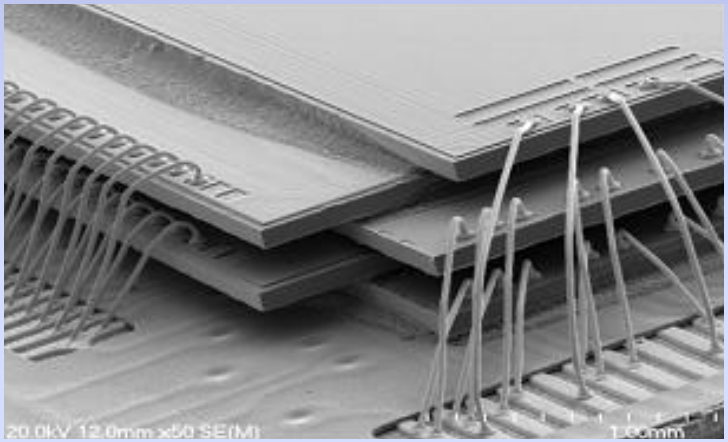
EL FUTURO DE LA ELECTRÓNICA

ITRS - Temas

- System Drivers/Design
- Test & Test Equipment
- Front End Processes
- Photolithography
- IC Interconnects
- Factory Integration
- **Assembly & Packaging**
- Environment, Safety & Health
- Yield Enhancement
- Metrology
- **Modeling & Simulation**
- Emerging Research Devices
- Emerging Research Materials

EL FUTURO DE LAS OBLEAS

SiP: System in Package (ITRS, Assembly and Packaging)



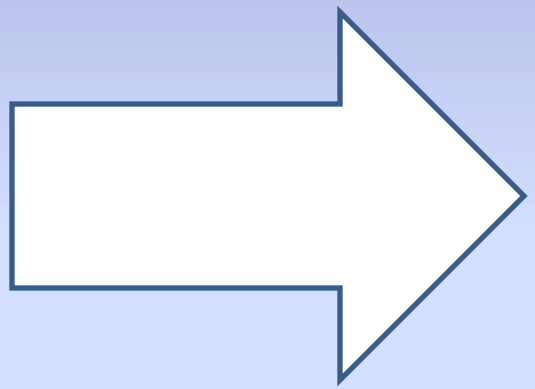
System Level Integration

Imágenes extraídas del ITRS 2007

EL FUTURO DE LAS OBLEAS

Necesidades de simulación

Integración de niveles



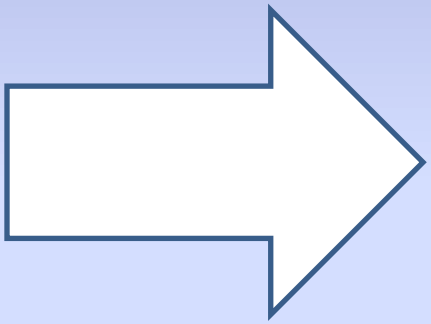
Desafíos térmicos para acomodar componentes

ITRS 2007 Assembly & Packaging

EL FUTURO DE LAS OBLEAS

Necesidades de simulación

Inviabilidad Económica de prototipos físicos



Modelaje y simulación como **única** alternativa

EL FUTURO DE LAS OBLEAS

Necesidades de simulación

Modelaje y simulación → Creación de métodos numéricos

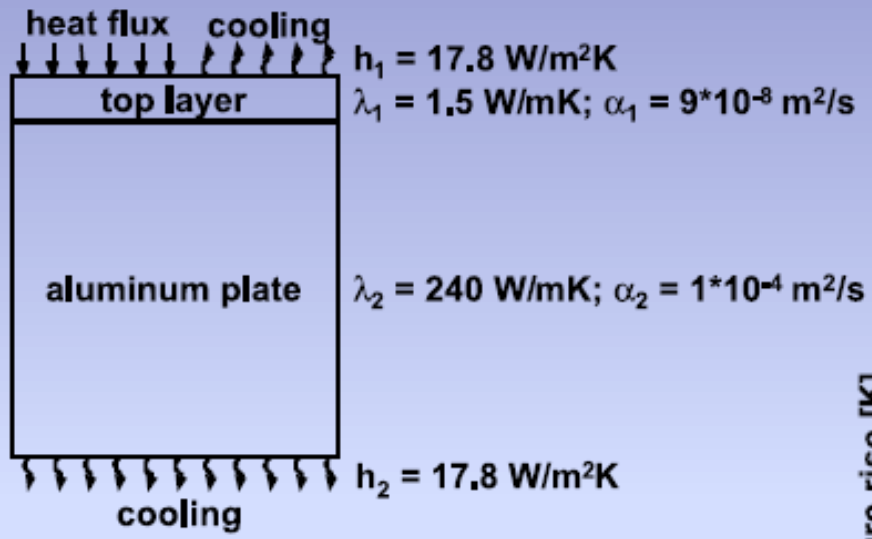
Sistema de integración de niveles → Simuladores Tridimensionales

ANTECEDENTES

M. Janicki, G. De Mey and A. Napieralski. "Transient thermal analysis of multilayered structures using Green's functions". *Microelectronics Journal,* 33, (2002), 733–738.

En dicho trabajo, se presenta un método de simulación con modelos tridimensionales encontrando una solución analítica aproximada por medio de funciones de Green.

ANTECEDENTES



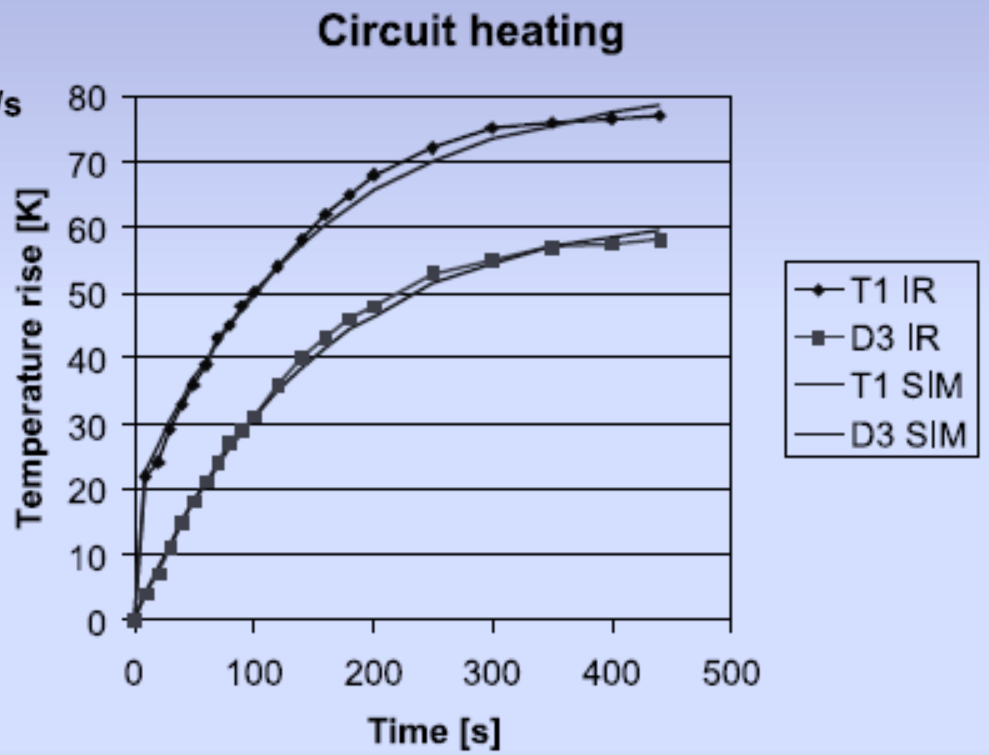


Figura extraída de Art. Transient thermal analysis of multilayered structures using Green's functions. Autores: Marcin Janicki, Gilbert De Mey, Andrzej Napieralski

ANTECEDENTES

C. E. Sauer, *“Circuitos Electrónicos 2D: Simulación, Control y Refrigeración”, Universidad* Nacional de Asunción, (2009).

En dicho trabajo, se presenta un método de simulación y control con modelos bidimensionales. El trabajo del Ing. Sauer propone como desarrollos futuros una serie de desarrollos que son en su totalidad encarados en el presente trabajo

ANTECEDENTES

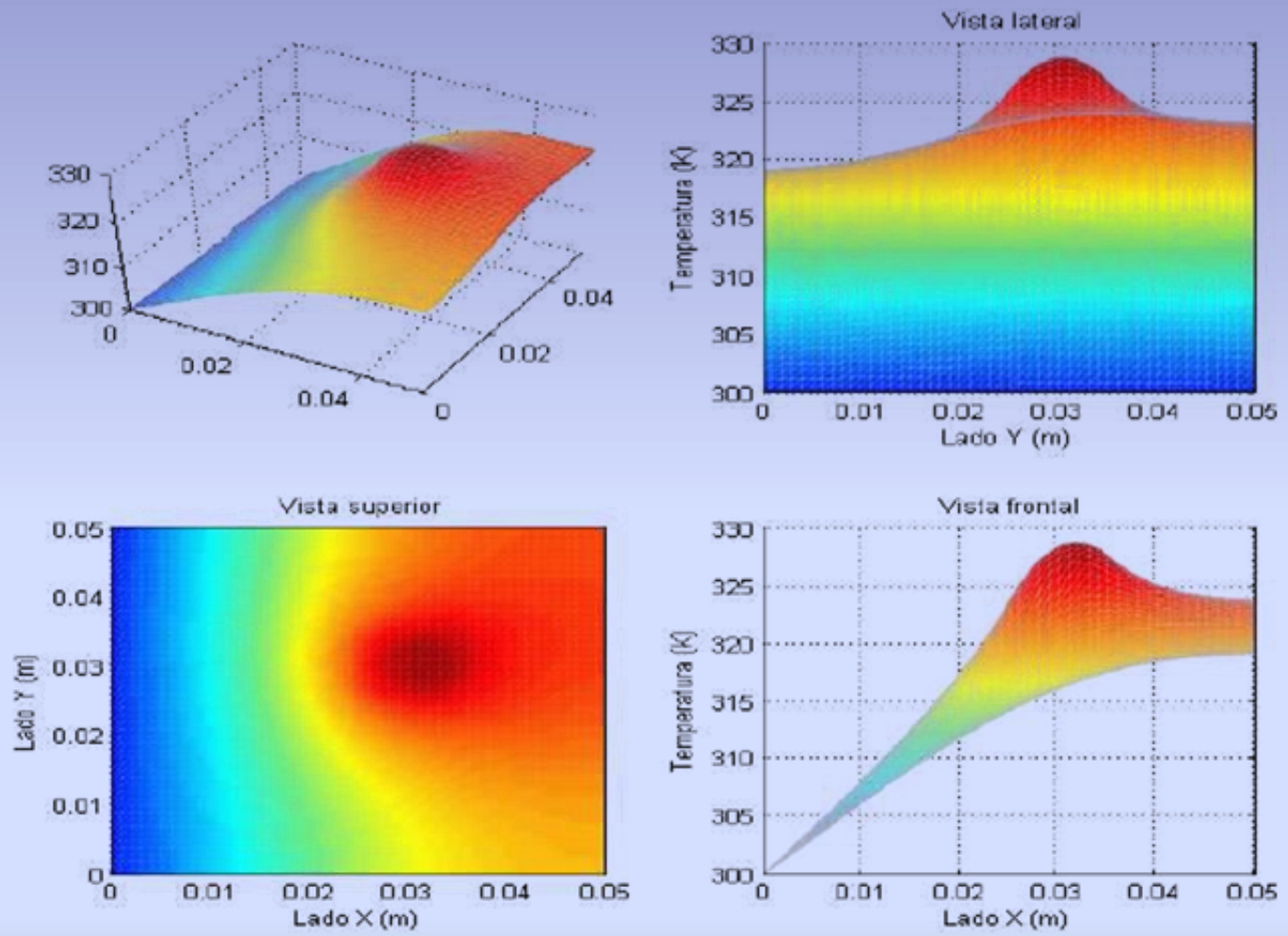


Figura extraída de, *"Circuitos Electrónicos 2D: Simulación, Control y Refrigeración"*, Universidad Nacional de Asunción, (2009) Autor: C. E. Sauer

Contenido

- Motivación y relevancia del trabajo
- **Objetivos y Alcance**
- Modelado y discretización
- Simulación
- Resultados de la simulación
- Control óptimo
- Resultados del control óptimo
- Otros desarrollos parciales
- Conclusiones y trabajos futuros

OBJETIVOS GENERALES

- Simular el fenómeno de disipación de calor en circuitos electrónicos.
- Desarrollar un método de control óptimo de la temperatura del circuito.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desarrollar un software de simulación del transitorio térmico de circuitos electrónicos.
- Validar empíricamente el método de simulación desarrollado por medio de resultados de laboratorio.
- Desarrollar un método de control óptimo con frontera de Neumann.
- Desarrollar un método de control óptimo con frontera de Robin.
- Seleccionar y crear técnicas matemáticas que permitan la resolución de los problemas no lineales asociados a la optimización encarada.

ALCANCE DEL TRABAJO

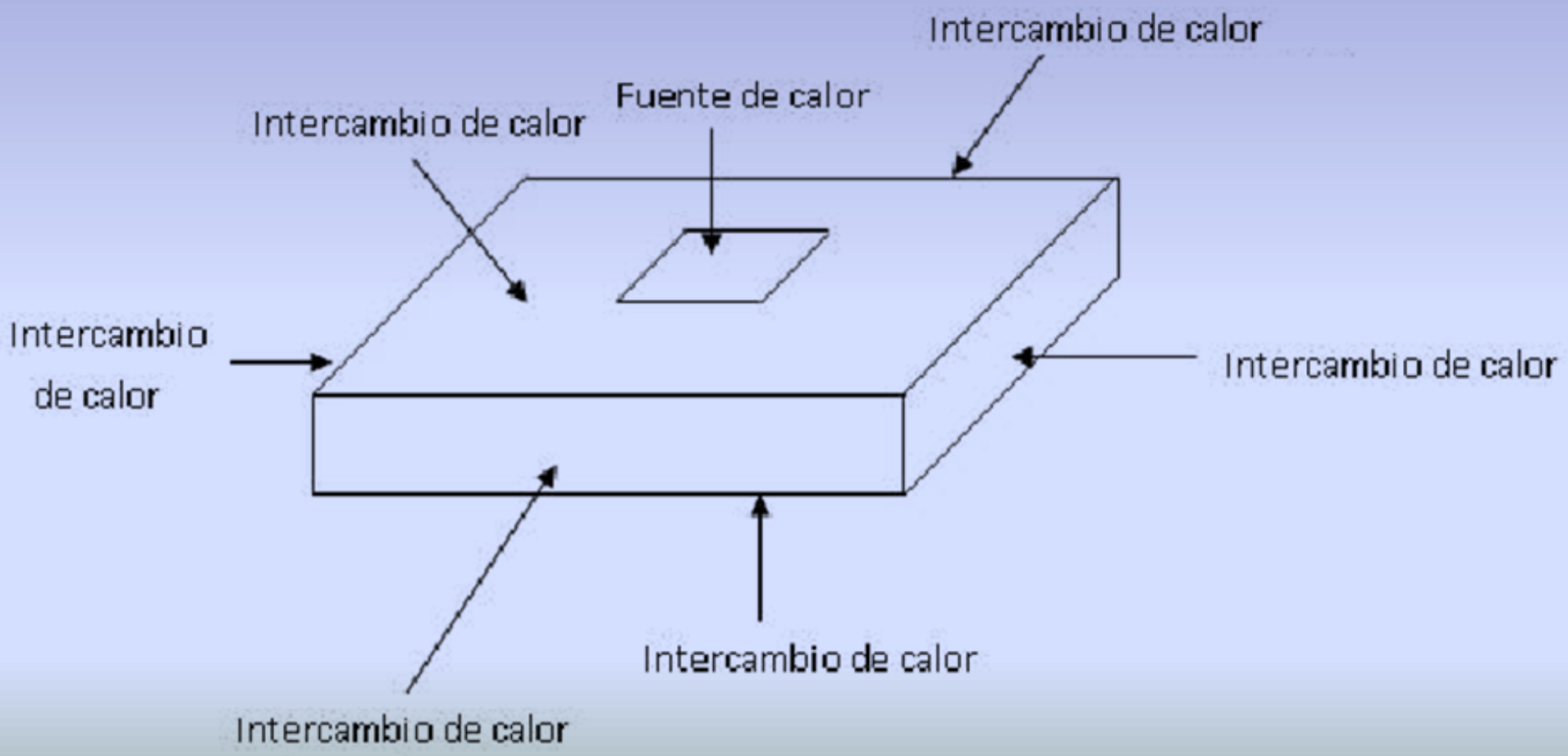
- Desarrollo de un método teórico-matemático para la simulación y el control óptimo de sistemas térmicos de frontera convectiva.
- Ensayo de los métodos teóricos desarrollados para validar los resultados obtenidos por los mismos.
- Determinación de las configuraciones óptimas teóricas de las condiciones de frontera para el control de temperatura del circuito.
- Instauración de las bases para el desarrollo de futuras investigaciones y estudios de implementación y estabilidad del método.

Contenido

- Motivación y relevancia del trabajo
- Objetivos y alcance del trabajo
- **Modelado y discretización**
- Implementación numérica
- Simulación
- Resultados de la simulación
- Control óptimo
- Resultados del control óptimo
- Otros desarrollos parciales
- Conclusiones y trabajos futuros

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

EL PROBLEMA TÉRMICO



MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

Leyes constitutivas

- Ley de Fourier de la conducción de calor en sólidos

$$q = -\lambda \nabla T$$

- Conservación de la energía para un volumen unitario

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho e d\Omega = \int_{\partial\Omega} q d\Gamma + \int_{\Omega} f d\Omega$$

Ecuación diferencial de la conducción de calor en sólidos

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + f$$

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

Condiciones de contorno

- Ley de Newton de transferencia de calor por convección

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{h}{\lambda}\left(T - T_\infty\right)$$

h = Coeficiente de convección de calor.

λ= Conductividad térmica.

T_∞ = Temperatura no perturbada.

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

Simplificaciones al modelo

- Propiedades físicas consideradas constantes por partes en espacio y tiempo.

- Fuente de calor constante por partes en espacio y tiempo.

- Materiales isótropos.

- Contactos perfectos.

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

Formulación fuerte

$$\begin{cases} \rho c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + f & \text{en} \quad \Omega \times [t_0, t_f] \\ T(x,0) = T_0 & \text{en} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = -\dfrac{h}{\lambda}(T - T_\infty) & \text{en} \quad \partial\Omega \times [t_0, t_f] \end{cases}$$

ρ	Densidad.
c_p	Calor Específico.
λ	Conductividad Térmica.
T	Temperatura de cada punto.
f	Fuente de calor.
h	Coeficiente de convección.
T_∞	Temperatura ambiente.
Ω	Dominio Espacial.
$[t_0, t_f]$	Intervalo temporal.
T_0	Temperatura en el tiempo inicial.

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

Formulación variacional

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_\Omega \eta \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \int_\Omega \eta \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \int_\Omega \eta f & \text{en} \quad \Omega \times [t_0, t_f] \\
T(x,0) = T_0 & \text{en} \quad \Omega \\
\displaystyle\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{h}{\lambda}(T - T_\infty) & \text{en} \quad \partial\Omega \times [t_0, t_f]
\end{cases}
$$

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

Formulación débil

Utilizando la primera identidad de Green, dada por:

$$\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \varphi dV = -\int_{\Omega} (\nabla \varphi \cdot \nabla \phi)\, dV + \oint_{\partial\Omega} \phi\, (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n})\, dS$$

Y la condición de contacto perfecto, se tiene la siguiente formulación débil

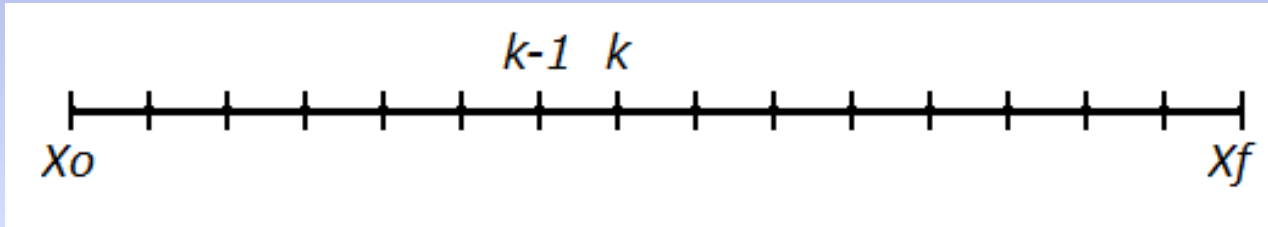
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega} \rho c_p \eta \frac{\partial T}{\partial t} = -\int_{\Omega} \lambda \nabla \eta \cdot \nabla T + \oint_{\partial\Omega} \lambda \eta \partial_n T + \int_{\Omega} f \eta & \text{en} \quad \Omega \times [t_0, t_f] \\ T(x,0) = T_0 & \text{en} \quad \Omega \\ \displaystyle\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{h}{\lambda}(T - T_\infty) & \text{en} \quad \partial\Omega \times [t_0, t_f] \end{cases}$$

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

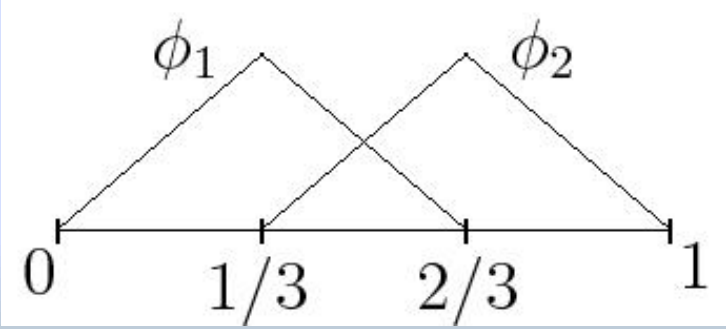
Discretización Espacial

Caso Unidimensional (1D)

- División del Dominio



- Base de funciones

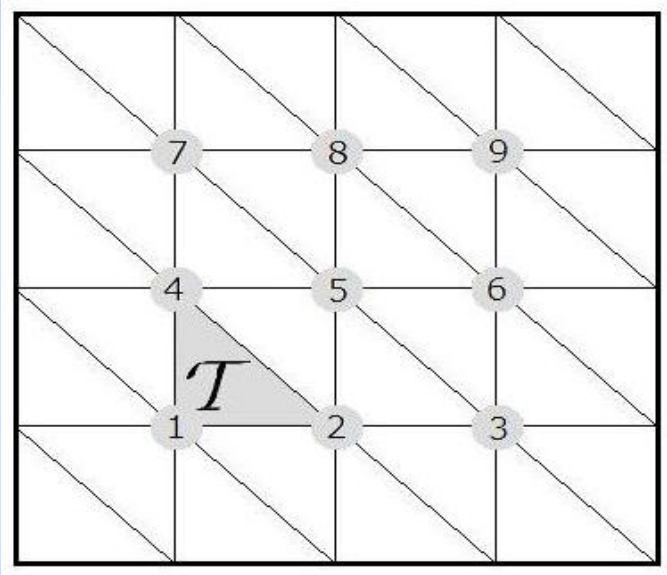


MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

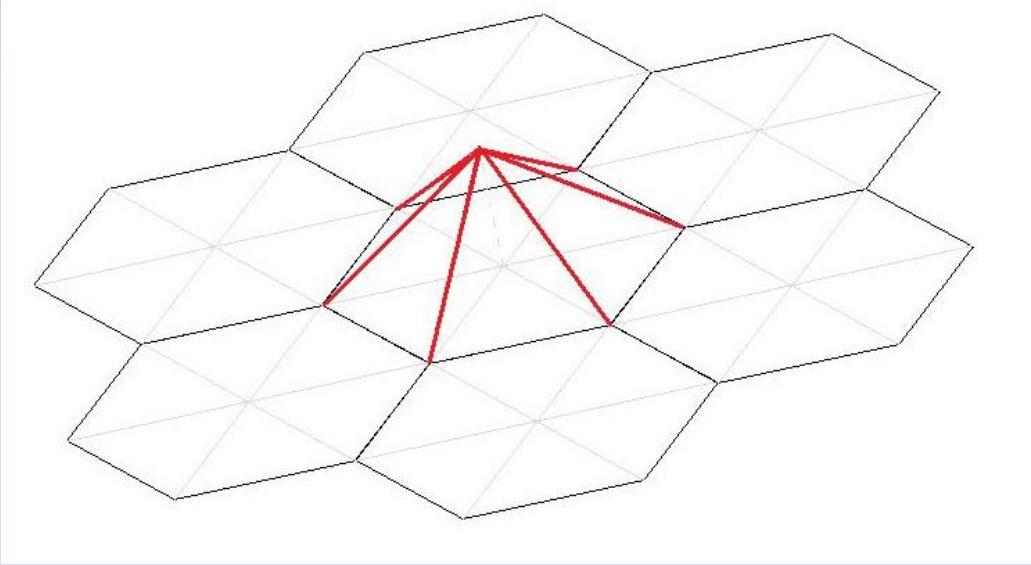
Discretización Espacial

Caso Bidimensional (2D)

- División del Dominio



Base de funciones

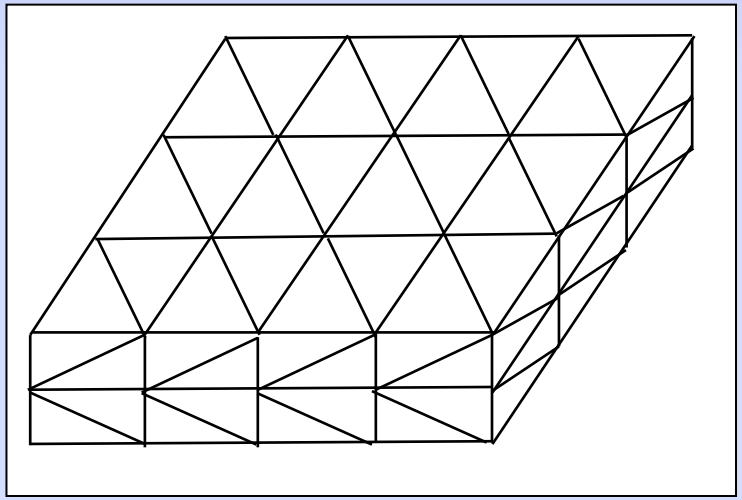


MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

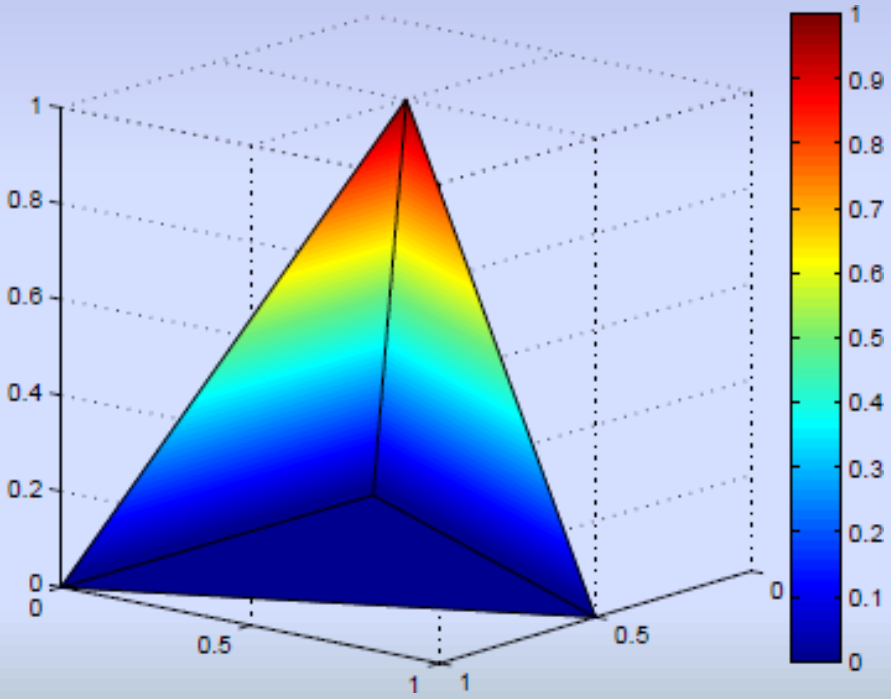
Discretización Espacial

Caso Tridimensional (3D)

- División del Dominio



Base de funciones



MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

Método de Galerkin

- Separación de variables

$$T(x,t) = \sum_{m=1}^{\hat{m}} z_m(t)\,\eta_m(x)$$

- Espacio de dimensión finita

$$\int_\Omega \rho c_p \eta_i \left(\sum_j \dot{z}_j \eta_j\right) = -\int_\Omega \lambda \nabla \eta_i \cdot \nabla \left(\sum_j z_j \eta_j\right) - \int_{\partial\Omega} h \eta_i \left(\sum_j z_j \eta_j\right) + T_\infty \int_{\partial\Omega} h \eta_i + \int_\Omega f \eta_i$$

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

Método de Galerkin

$$B\dot{\mathbf{z}} = -A\mathbf{z} - C(h)\,\mathbf{z} + T_\infty D\mathbf{h} + \mathbf{b}$$

Donde:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 & \dots & \dot{z}_j & \dots & \dot{z}_{\hat{m}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & \dots & z_j & \dots & z_{\hat{m}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_i & \dots & b_{\hat{m}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{m}}$$

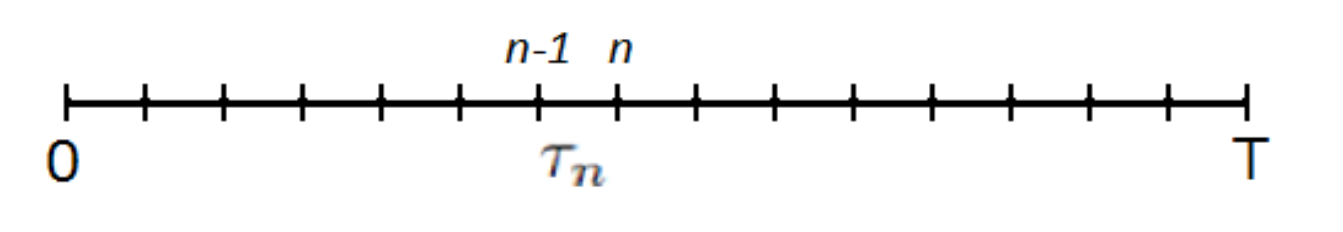
$$B = \left[\int_\Omega \rho c_p \eta_i \eta_j\right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m}\times\hat{m}} \qquad A = \left[\int_\Omega \lambda \nabla\eta_i \nabla\eta_j\right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m}\times\hat{m}}$$

$$C = \left[\int_{\partial\Omega} h \eta_i \eta_j\right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m}\times\hat{m}} \qquad D = \left[\int_{\partial j} \eta_i\right]_{ij} \in \mathbb{R}^{\hat{m}\times\hat{l}}$$

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

Discretización temporal

- División temporal



- Aproximación de la derivada

$$\dot{\mathbf{z}}_n \approx \frac{\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1}}{\tau_n}$$

MODELADO Y DISCRETIZACIÓN

Discretización temporal

- Remplazando

$$\left(B_n + \tau_k A_n + \tau_k C_n\right) \mathbf{z}_n - \tau_n T_\infty D_n h = \tau_n b_n + B_n \mathbf{z}_{n-1}$$

- Acople temporal

$$E\left(\hat{\mathbf{h}}\right) \hat{\mathbf{z}} + N \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{f}$$

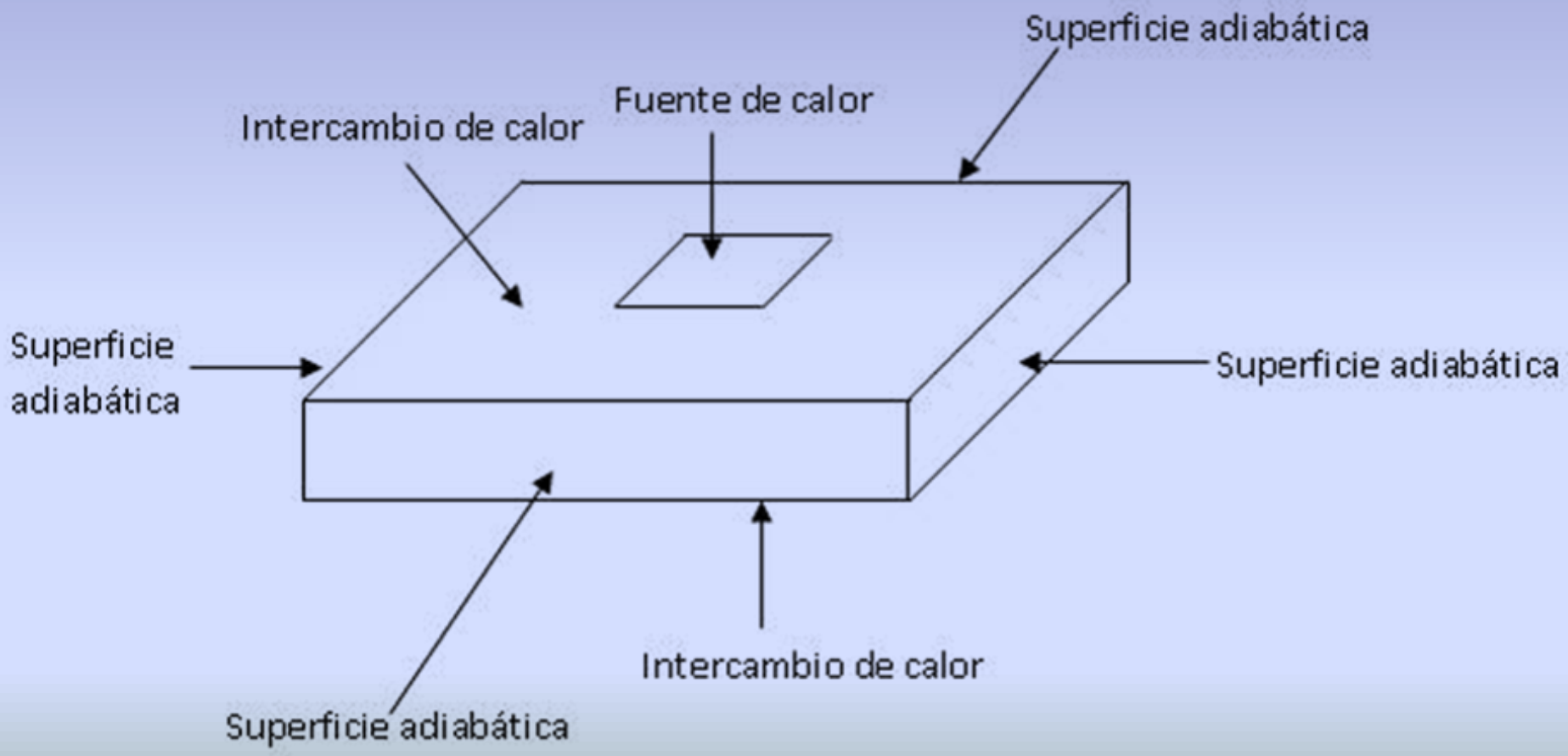
- Donde

$$E = \hat{B} + \hat{A} + \hat{C}\left(\hat{\mathbf{h}}\right)$$

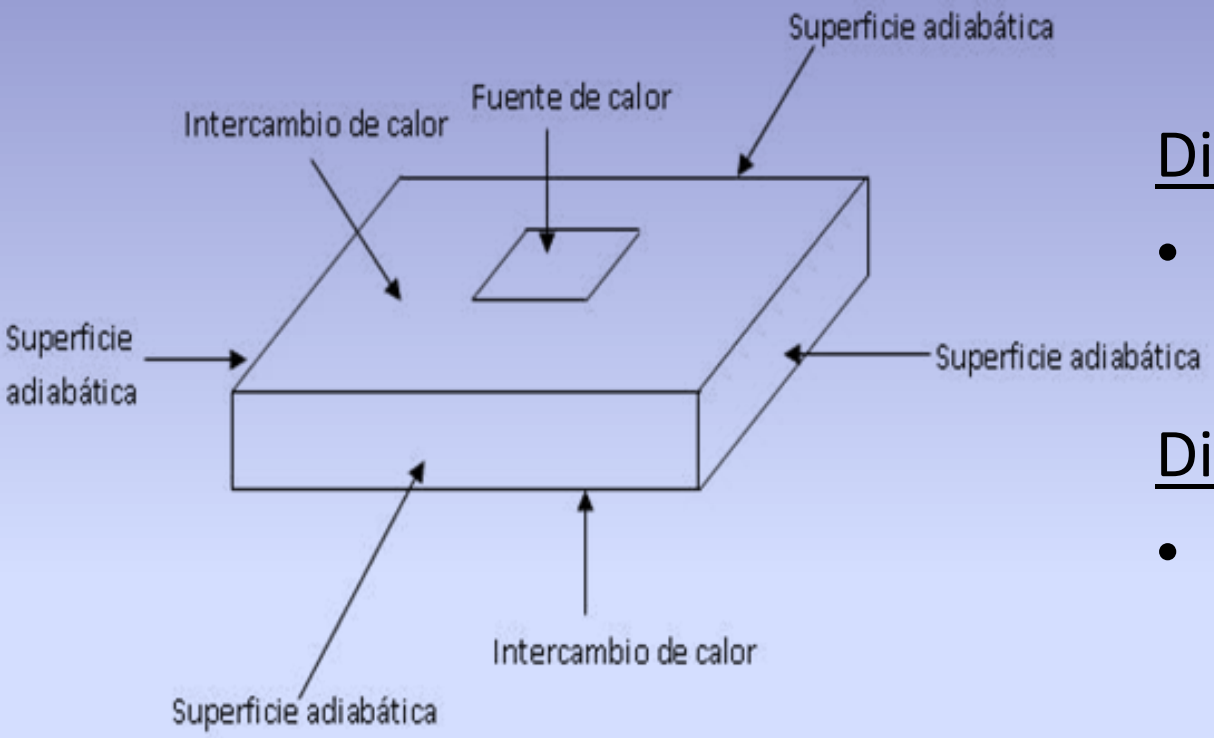
Contenido

- Motivación y relevancia del trabajo
- Objetivos y Alcance
- Modelado y discretización
- **Simulación**
- Resultados de la simulación
- Control óptimo
- Resultados del control óptimo
- Otros desarrollos parciales
- Conclusiones y trabajos futuros

EL PROBLEMA TÉRMICO



MODELO A SIMULAR



Dimensiones placa:

- 7,5 cm x 5 cm y 1,5mm.

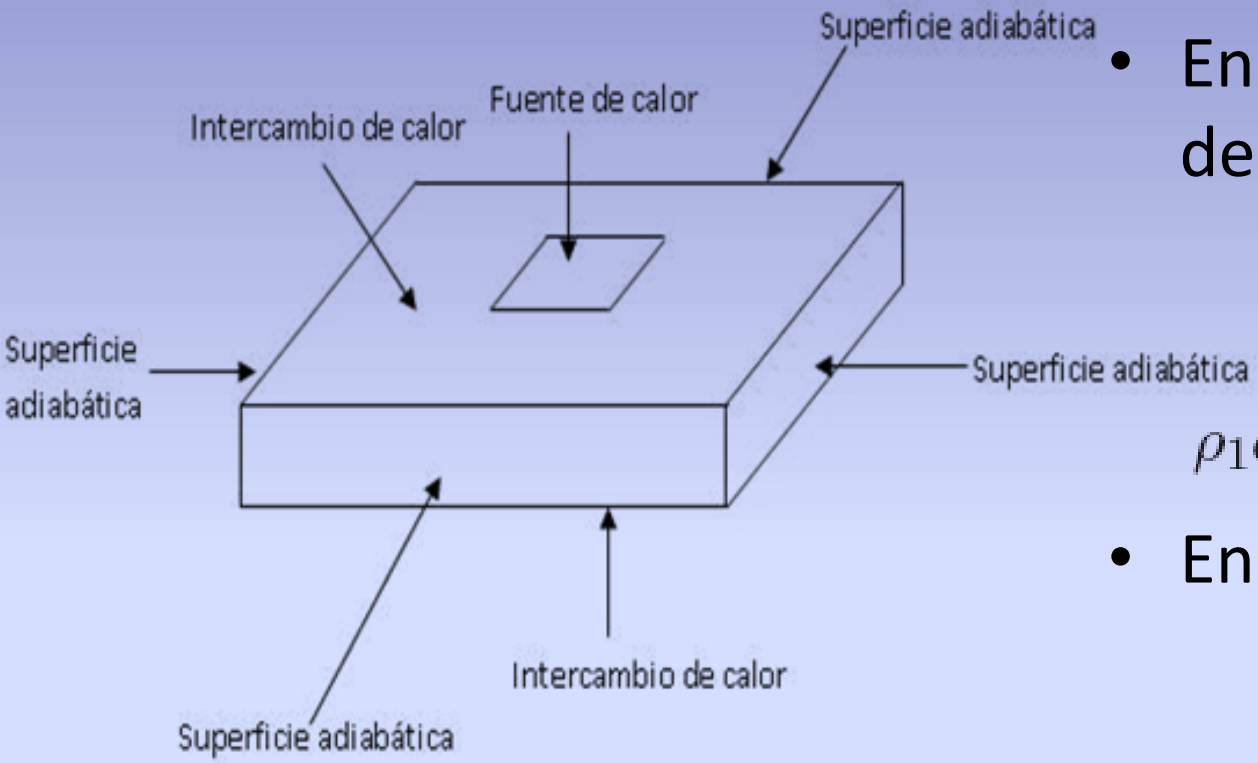
Dimensiones del chip:

- 2 cm x 1 cm y 1,5mm.

- Despreciamos el intercambio de calor en las superficies laterales.
- Tenemos la temperatura inicial: $T(x,0) = T_\infty.$

- Tomamos temperatura ambiente: $T_\infty = 293\,K$

MODELO A SIMULAR



- En el cuerpo generador de calor tenemos:

$$\lambda_1 = 1,5\frac{W}{mK}$$

$$\rho_1 c_{p1} = 1,67\times 10^7 \frac{J}{m^3 K}$$

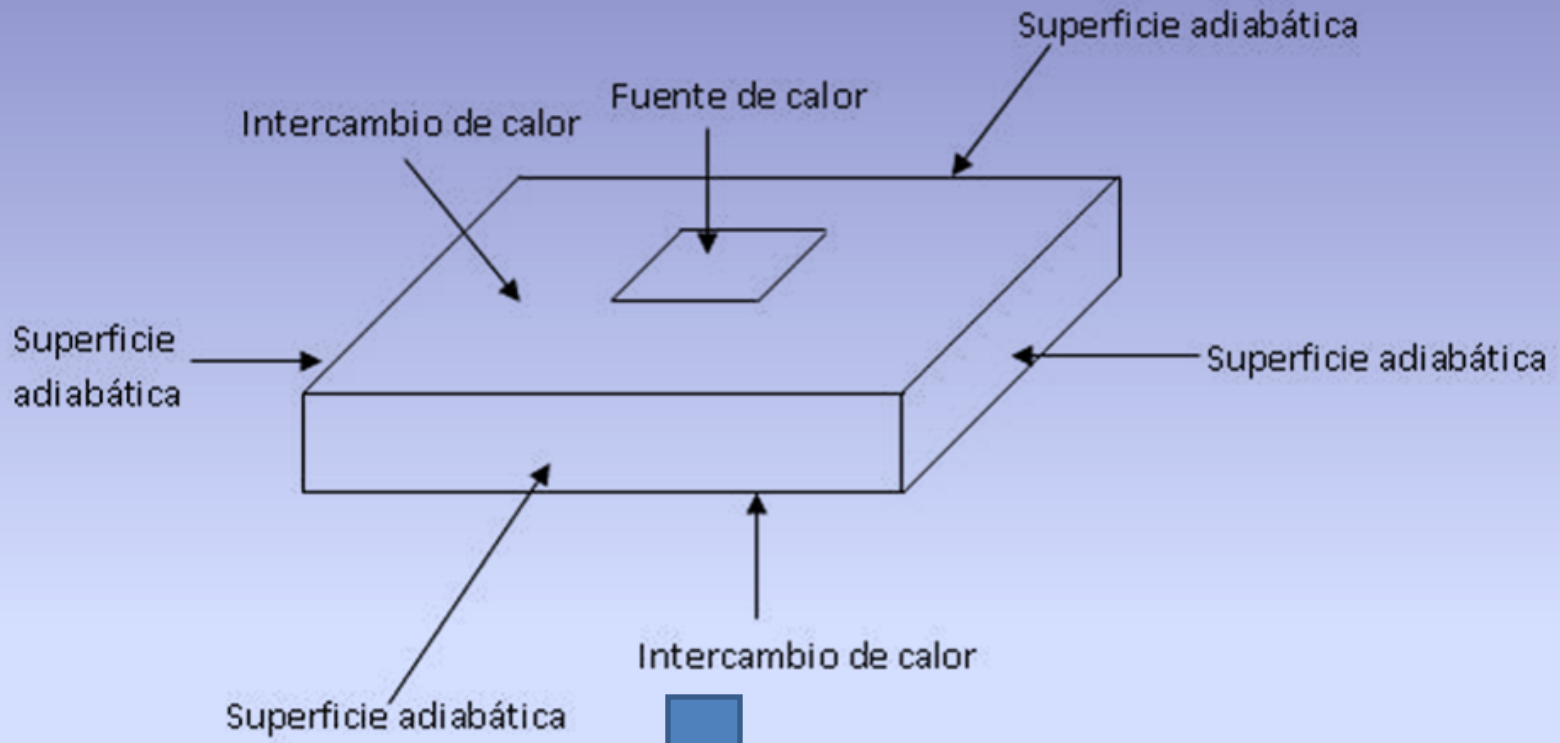
- En la placa

$$\lambda_2 = 240\frac{W}{mK}.$$

$$\rho_2 c_{p2} = 240 \times 10^4 \frac{J}{m^3 K}$$

- El coeficiente de convección: $h = 17,8\frac{W}{m^2 K}$
- Calor generado por el chip: $9,4W$

PROBLEMA A RESOLVER



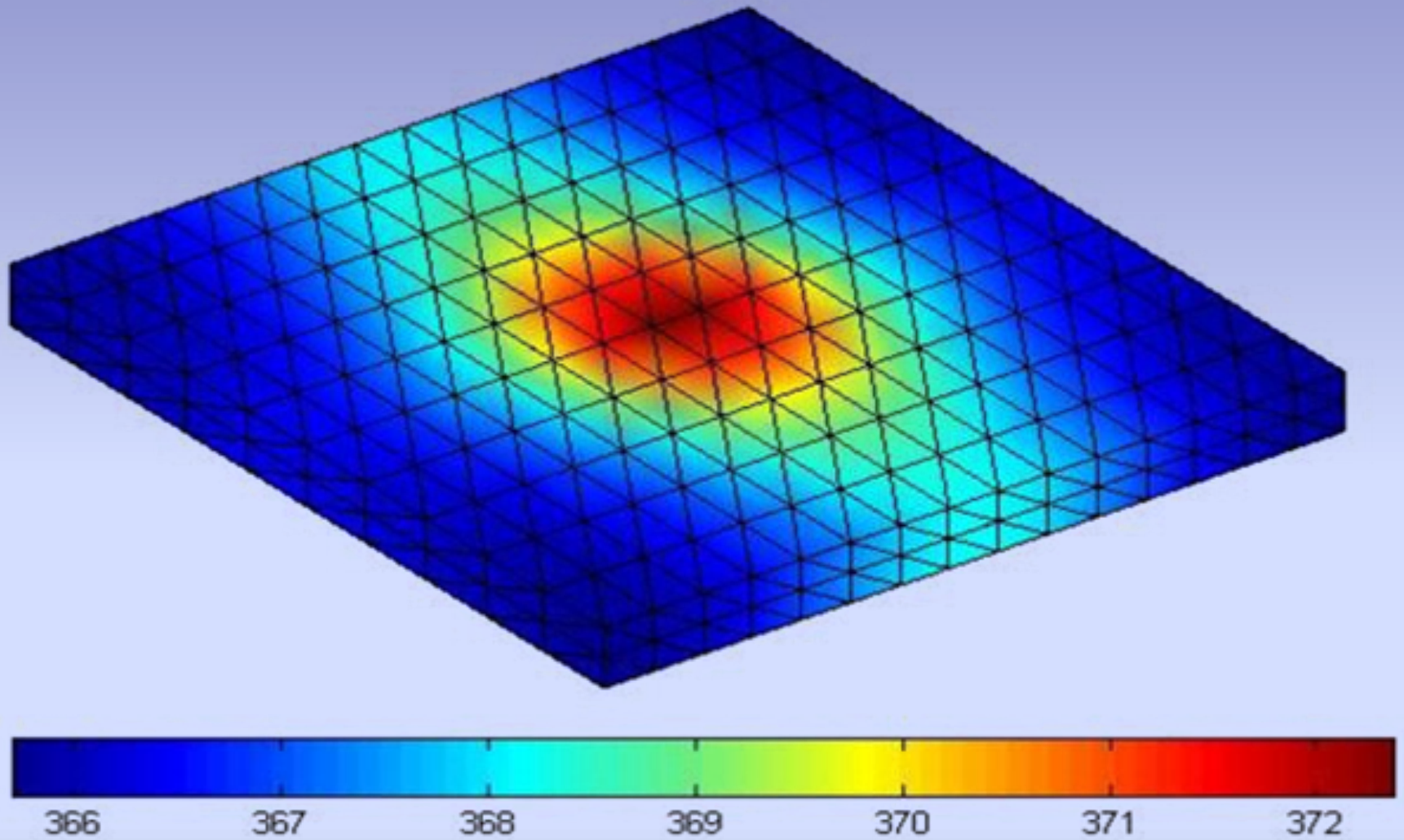
$$\begin{cases} \rho c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + f & \text{en} \quad \Omega \times [t_0, t_f] \\ T(x,0) = T_0 & \text{en} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = -\dfrac{h}{\lambda}(T - T_\infty) & \text{en} \quad \partial\Omega \times [t_0, t_f] \end{cases}$$

$$E\left(\hat{\mathrm{h}}\right)\hat{\mathrm{z}} = \hat{\mathrm{f}} - N\hat{\mathrm{h}}$$

Contenido

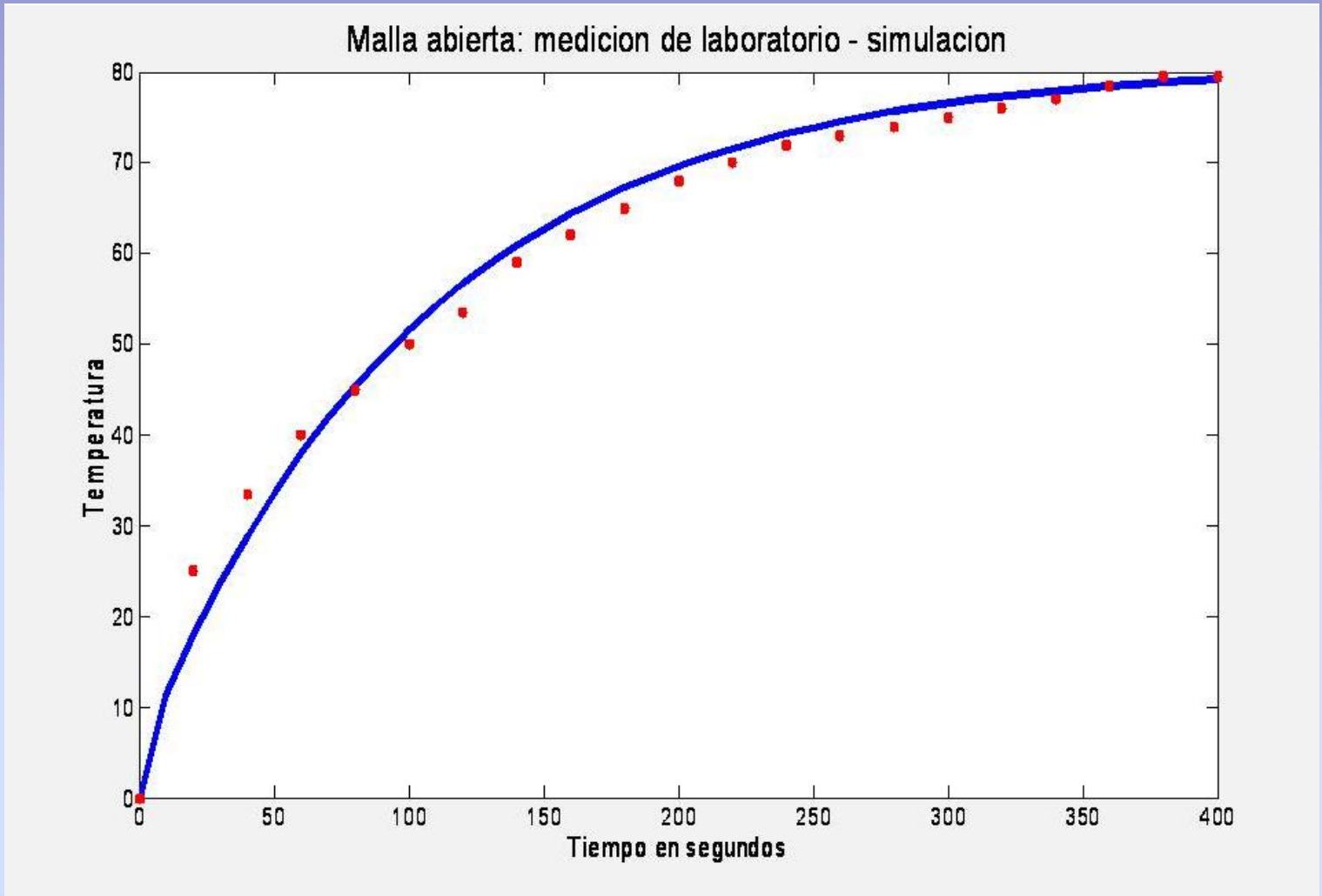
- Motivación y relevancia del trabajo
- Objetivos y Alcance
- Modelado y discretización
- Simulación
- **Resultados de la simulación**
- Control óptimo
- Resultados del control óptimo
- Otros desarrollos parciales
- Conclusiones y trabajos futuros

RESULTADOS NUMÉRICOS



La figura muestra el campo de temperatura de la placa del circuito electrónico en estado estable

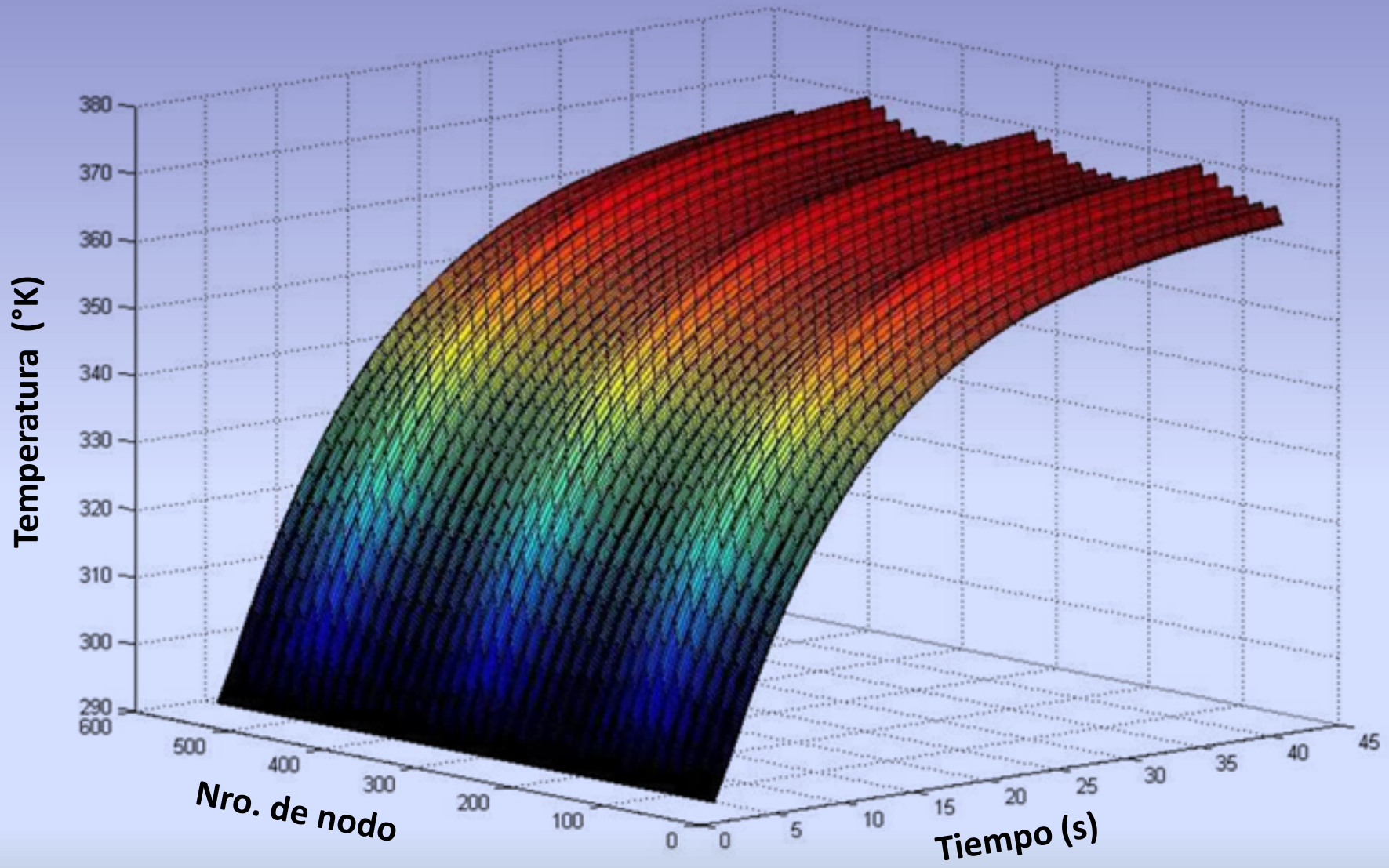
RESULTADOS NUMÉRICOS



La línea continua muestra el resultado de la simulación y los puntos los de laboratorio

Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; “Transient thermal analysis of multilayered structures using Green’s function”. (Microelectronics Reliability, 42: 1059-1064, 2002).

RESULTADOS NUMÉRICOS

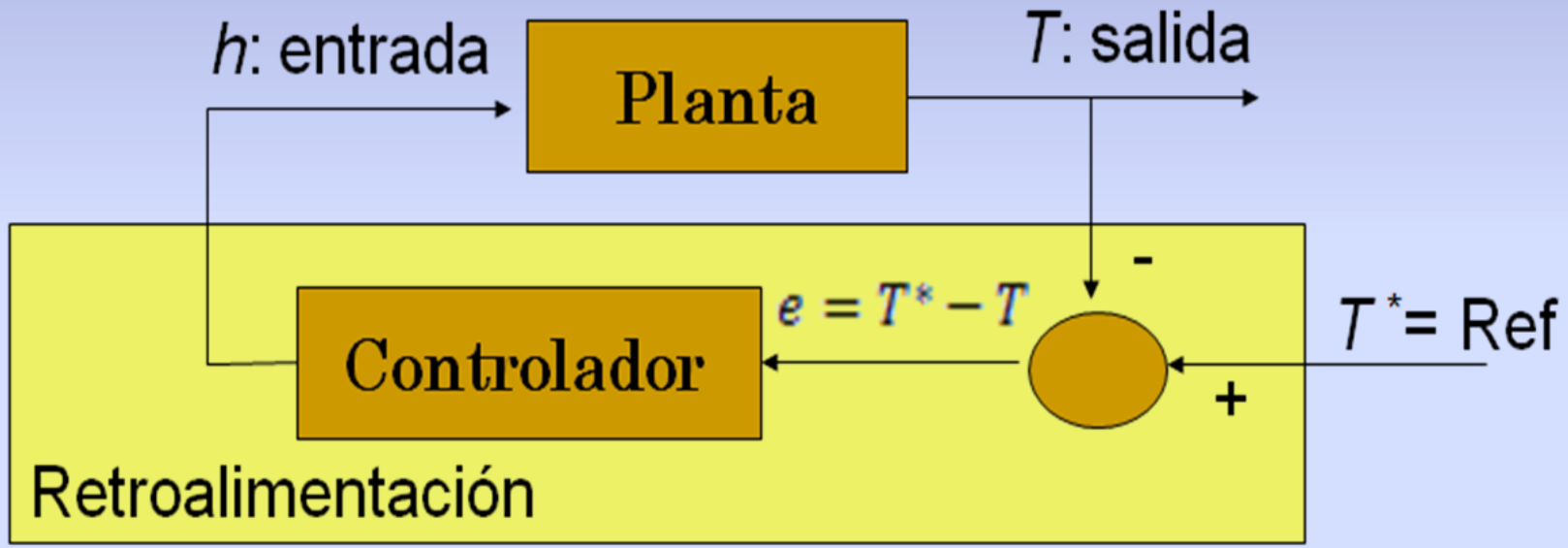


La figura muestra el transitorio térmico de cada punto de la placa del circuito electrónico.

Contenido

- Motivación y relevancia del trabajo
- Objetivos y Alcance
- Modelado y discretización
- Simulación
- Resultados de la simulación
- **Control óptimo**
- Resultados del control óptimo
- Otros desarrollos parciales
- Conclusiones y trabajos futuros

CONTROL ÓPTIMO



CONTROL ÓPTIMO

Funcional continuo:

$$J\left(T,h\right)=\frac{q}{2}\parallel T-T^{*}\parallel^{2}_{L^{2}\left(t_{o},t_{f},\Omega\right)}+\frac{r}{2}\parallel h(x,t)\parallel^{2}_{L^{2}\left(t_{o},t_{f},\partial\Omega\right)}$$

donde:

$$\parallel f\parallel^{2}_{L^{2}\left(t_{o},t_{f},\Omega\right)}=\int_{t_{0}}^{t_{f}}\int_{\Omega}f^{2}\,dx\,dt$$

$$\parallel h\parallel^{2}_{L^{2}\left(t_{o},t_{f},\partial\Omega\right)}=\int_{t_{0}}^{t_{f}}\int_{\partial\Omega}h^{2}\,dx\,dt$$

CONTROL ÓPTIMO

El problema discreto

$$J = \frac{q}{2}\left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}^*\right)^T M \left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}}^*\right) + \frac{r}{2}\hat{\mathbf{h}}^T G\, \hat{\mathbf{h}}$$

Donde

$$M = \begin{bmatrix} \tau B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau B & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tau B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\hat{m}\cdot\hat{n}\times\hat{m}\cdot\hat{n}} \quad G = \begin{bmatrix} \tau Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau Q & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tau Q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\hat{l}\cdot\hat{n}\times\hat{l}\cdot\hat{n}}$$

$$\hat{\mathbf{z}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^{*\mathbf{T}} & \dots & \mathbf{z}_\mathbf{n}^{*\mathbf{T}} & \dots & \mathbf{z}_{\hat{\mathbf{n}}}^{*\mathbf{T}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\hat{m}\cdot\hat{n}}$$

CONTROL ÓPTIMO

El problema discreto

$$\begin{cases} \min & J\left(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{h}}\right) \\ \text{sujeto a} & E\left(\hat{\mathbf{h}}\right)\hat{\mathbf{z}} + N\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{f}} \end{cases}$$

CONTROL ÓPTIMO

Optimalidad (Multiplicadores de Lagrange)

$$L\left(\hat{\mathbf{z}},\hat{\mathbf{h}},\mathbf{p}\right)=\frac{q}{2}\left(\hat{\mathbf{z}}-\mathbf{z}^{*}\right)^{T}\,M\,\left(\hat{\mathbf{z}}-\mathbf{z}^{*}\right)+\frac{r}{2}\hat{\mathbf{h}}^{\mathbf{T}}\,Q\,\hat{\mathbf{h}}+\left\langle \mathbf{p},E\left(\hat{\mathbf{h}}\right)\hat{\mathbf{z}}+N\hat{\mathbf{h}}-\hat{\mathbf{f}}\right\rangle$$

Multiplicadores de Lagrange

Imponiendo las condiciones de optimalidad

$$F\left(\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{z}}\\ \hat{\mathbf{h}}\\ \mathbf{p}\end{bmatrix}_k\right)=$$

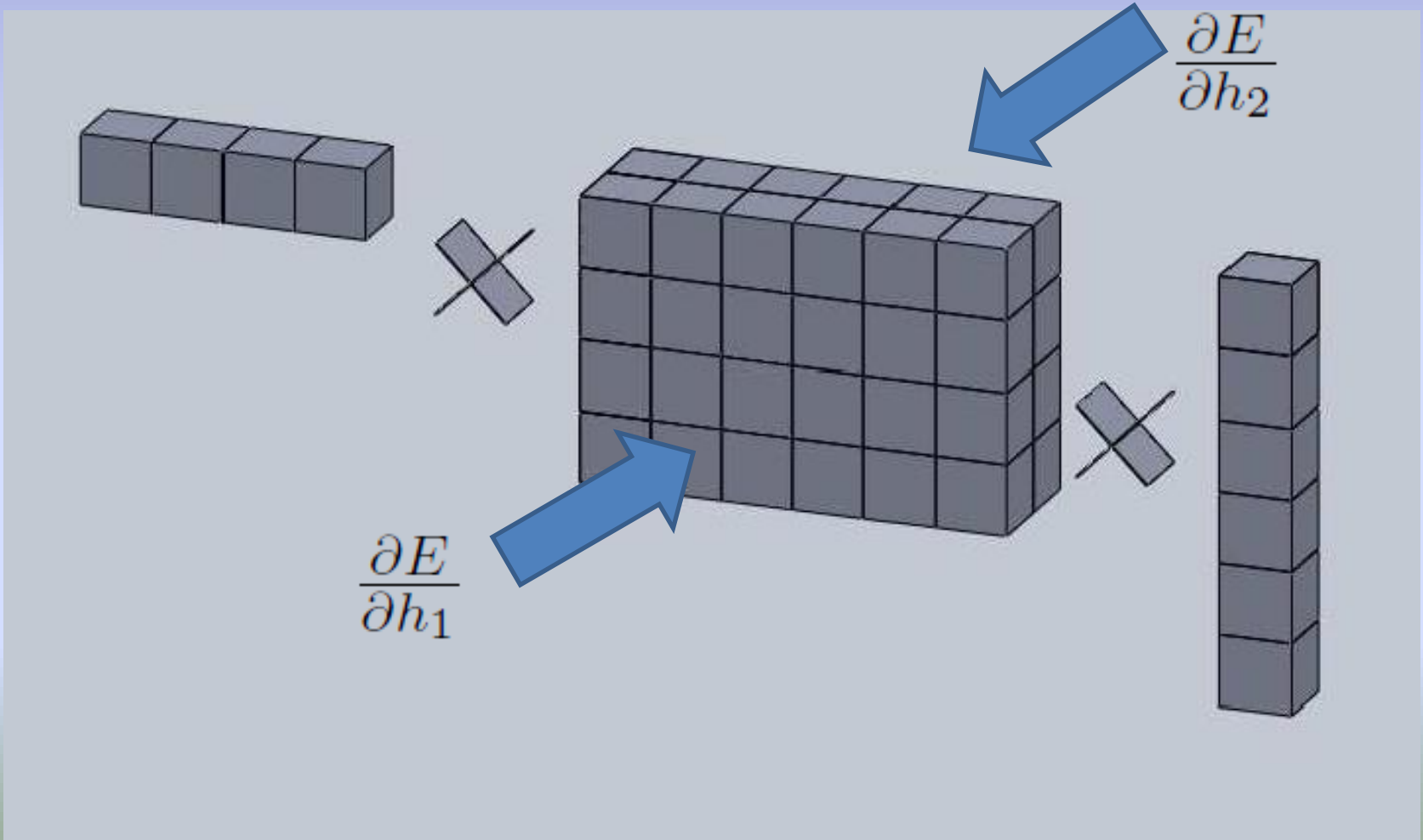
$$\partial_{\hat{\mathbf{z}}-\hat{\mathbf{z}}^{*}}L=q\,M\,\left(\hat{\mathbf{z}}-\mathbf{z}^{*}\right)+E\left(\hat{\mathbf{h}}\right)^{T}\mathbf{p}=0$$

$$\partial_{\hat{\mathbf{h}}}L=r\,G\,\hat{\mathbf{h}}+\mathbf{p}^{T}\times\frac{\partial E}{\partial\hat{\mathbf{h}}}\times\hat{\mathbf{z}}+N^{T}\,\mathbf{p}=0$$

$$\partial_{\mathbf{p}}L=E\left(\hat{\mathbf{h}}\right)\hat{\mathbf{z}}+N\hat{\mathbf{h}}-\hat{\mathbf{f}}=0$$

CONTROL ÓPTIMO

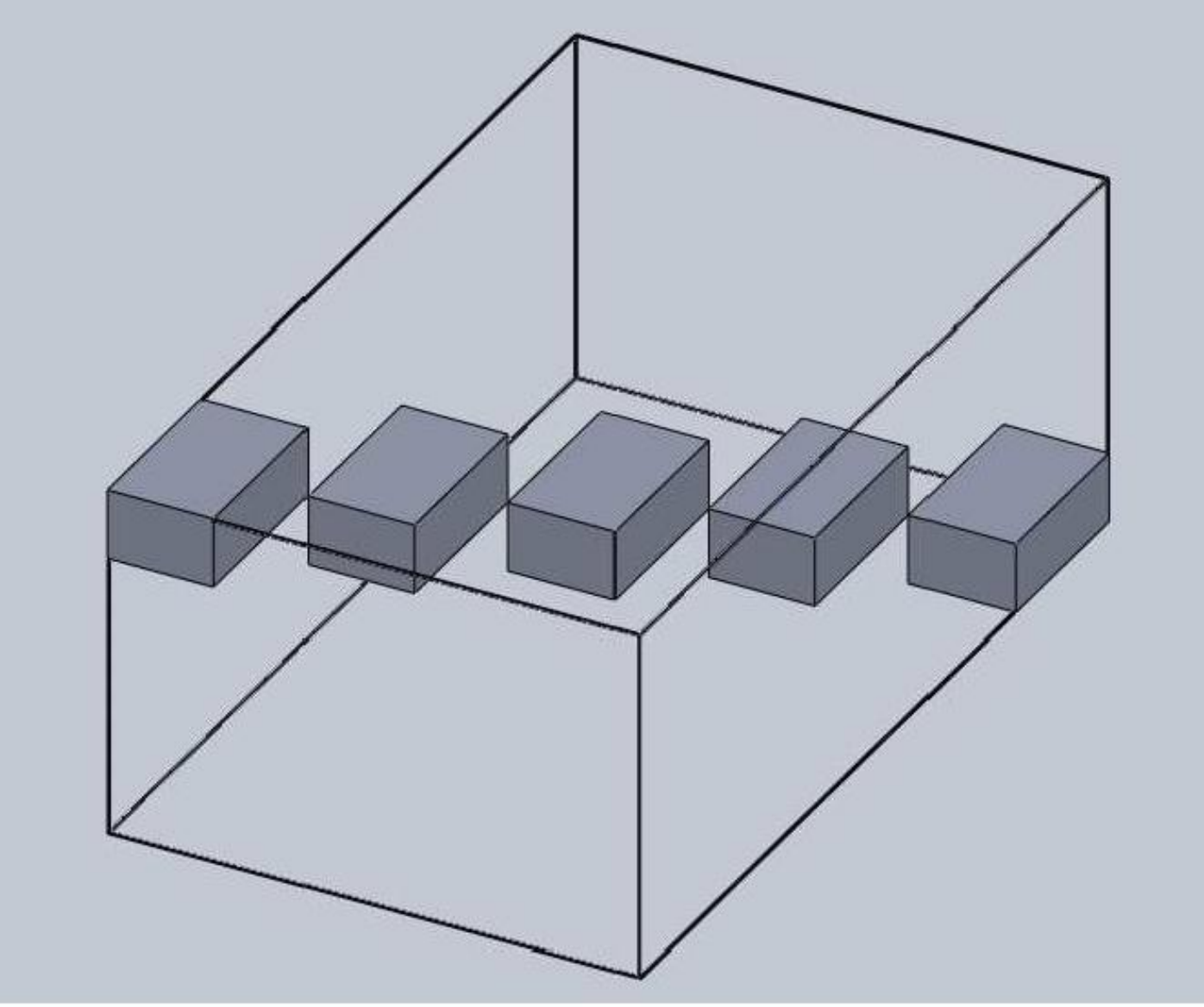
El producto $\mathbf{p}^T \times \frac{\partial E}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}}$



CONTROL ÓPTIMO

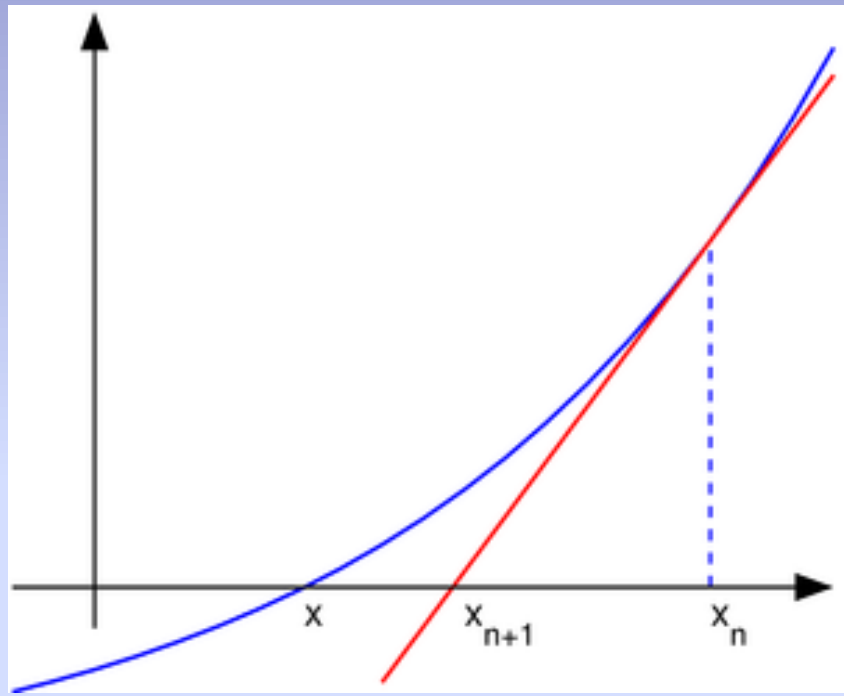
La matriz

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{\mathrm{h}}}$$



CONTROL ÓPTIMO

Newton-Raphson



- Ecuaciones no lineales.
- Método aproximado.
- Utiliza la dirección de crecimiento máximo, dada por el inverso del jacobiano del sistema de ecuaciones.

CONTROL ÓPTIMO

Newton-Raphson

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{z}} \\ \hat{\mathrm{h}} \\ \mathrm{p} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{z}} \\ \hat{\mathrm{h}} \\ \mathrm{p} \end{bmatrix}_{k} - S_k^{-1} F\left(\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{z}} \\ \hat{\mathrm{h}} \\ \mathrm{p} \end{bmatrix}_{k} \right)$$

CONTROL ÓPTIMO

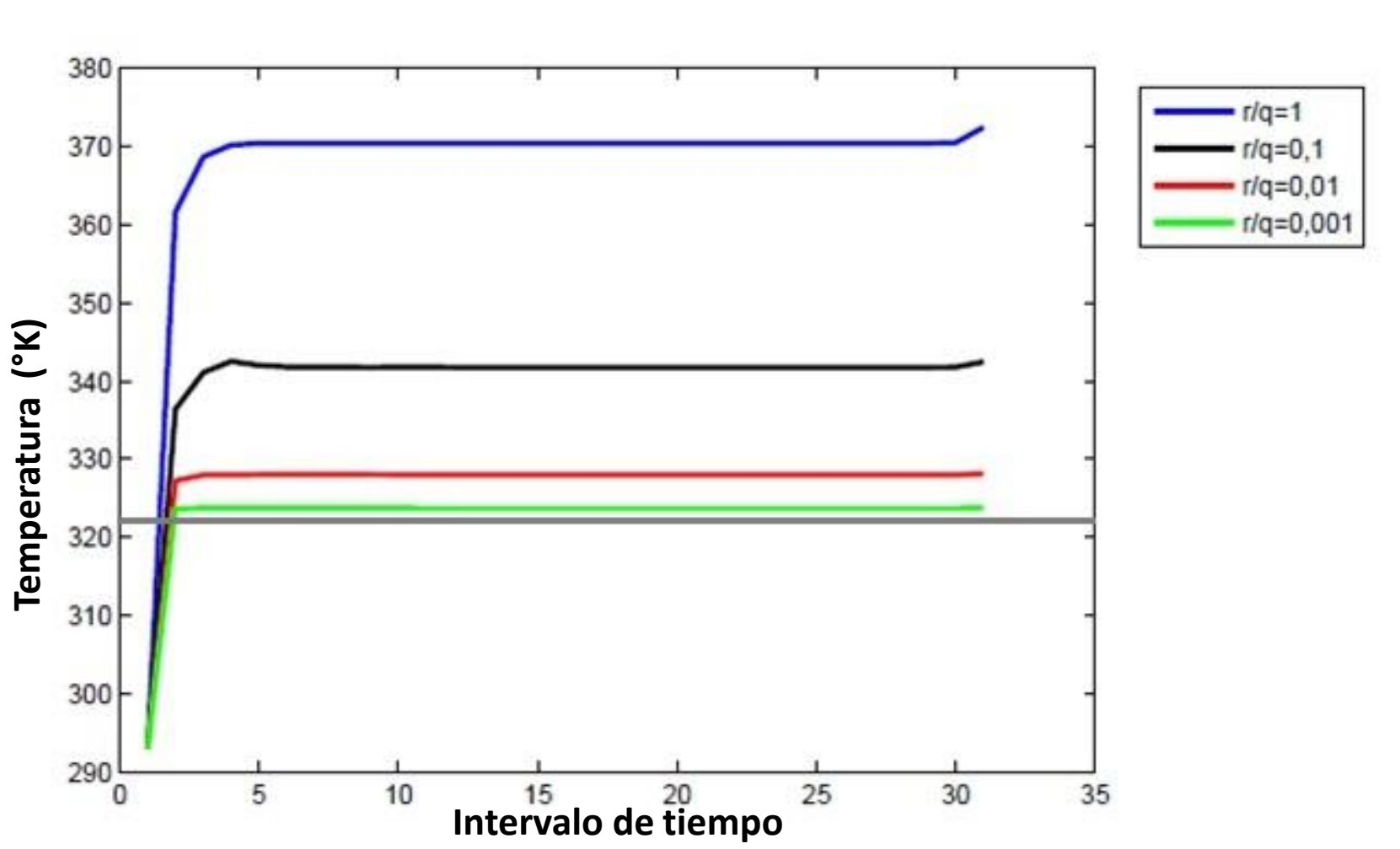
Resolución: Newton-Raphson (Jacobiano)

$$S = \begin{bmatrix} qM & \left(\mathbf{p}^T \times \frac{\partial C}{\partial \hat{\mathbf{h}}}\right)^T & E^T \\ \mathbf{p}^T \times \frac{\partial C}{\partial \hat{\mathbf{h}}} & rG & \left(\frac{\partial C}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N\right)^T \\ E & \frac{\partial C}{\partial \hat{\mathbf{h}}} \times \hat{\mathbf{z}} + N & 0 \end{bmatrix}$$

Contenido

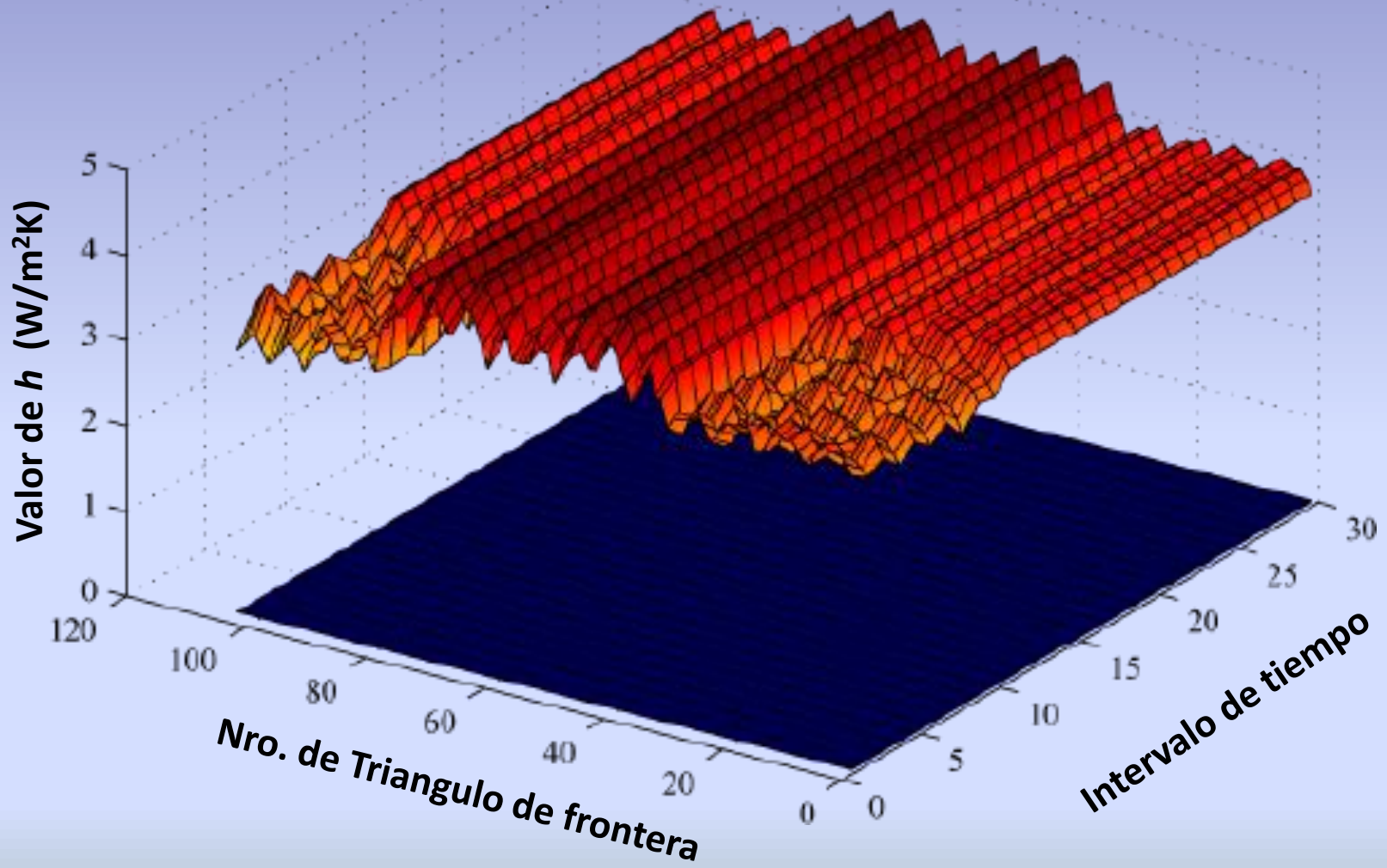
- Motivación y relevancia del trabajo
- Objetivos y Alcance
- Modelado y discretización
- Simulación
- Resultados de la simulación
- Control óptimo
- **Resultados del control óptimo**
- Otros desarrollos parciales
- Conclusiones y trabajos futuros

RESULTADOS DEL CONTROL



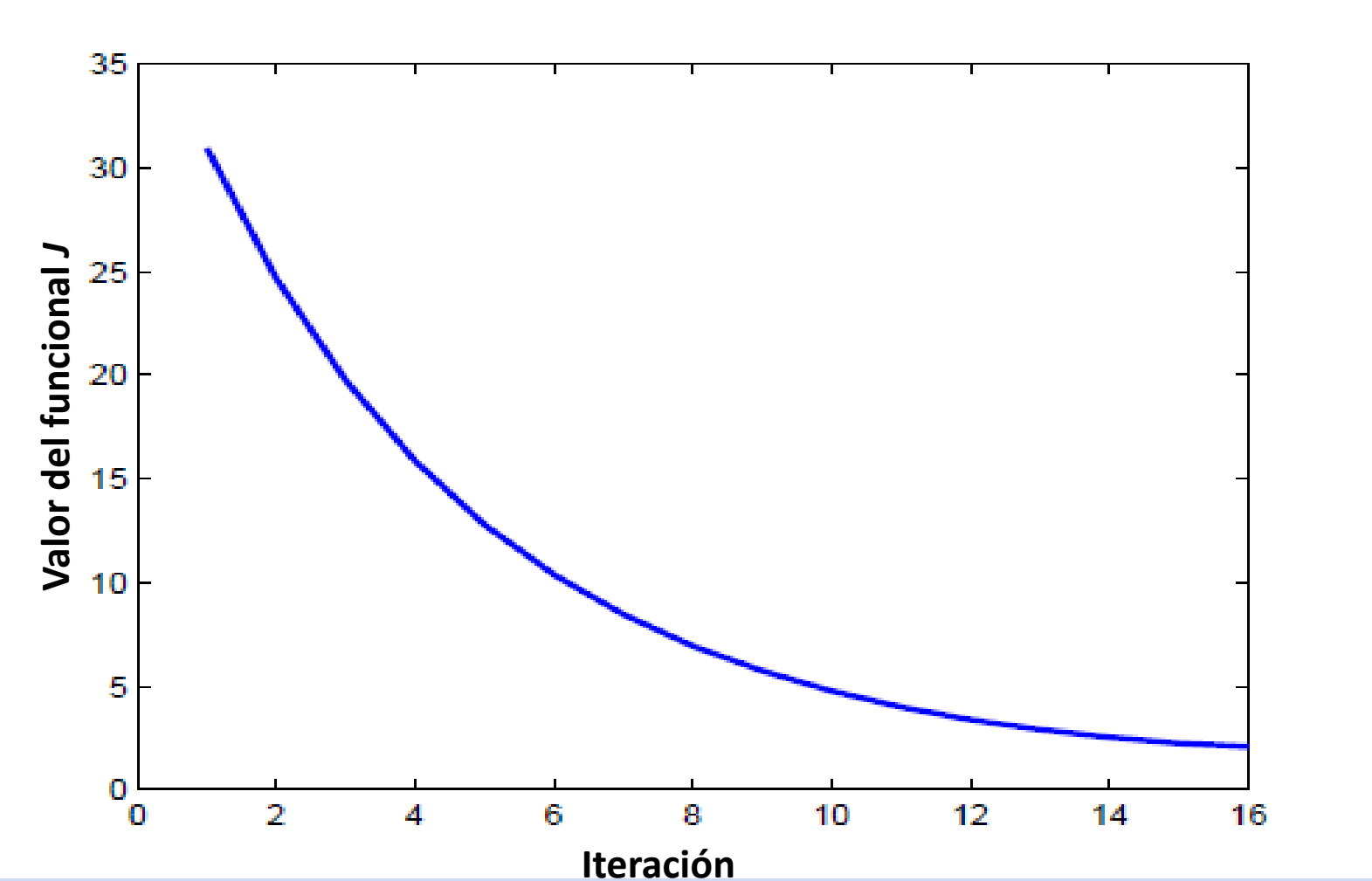
Evaluación del controlador para distintas relaciones entre r y q para una temperatura óptima de 323 grados Kelvin.

RESULTADOS DEL CONTROL



Valores del coeficiente de convección h en cada triangulo de la frontera, y su evolución temporal.

RESULTADOS DEL CONTROL



El gráfico muestra valor del funcional de costo con el número de iteraciones en el método de NewtonRapson

Contenido

- Motivación y relevancia del trabajo
- Objetivos y Alcance
- Modelado y discretización
- Simulación
- Resultados de la simulación
- Control óptimo
- Resultados del control óptimo
- **Otros desarrollos parciales**
- Conclusiones y trabajos futuros

OTROS DESARROLLOS PARCIALES

Control óptimo con frontera Neumann:

Formulación fuerte:

$$\begin{cases} \rho c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + f & en \quad \Omega \times [t_0, t_f] \\ T(x,0) = T_0 & \\ \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = -\dfrac{q}{\lambda} & en \quad \partial\Omega \times [t_0, t_f] \end{cases}$$

OTROS DESARROLLOS PARCIALES

Control óptimo con frontera Neumann:

Problema matricial:

$$B\dot{\mathbf{z}} = -A\mathbf{z} - D\mathbf{q} + \mathbf{b}$$

Donde todos los vectores ya fueron definidos en el problema de frontera Robin, excepto por

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_l & \dots & q_{\hat{l}} \end{bmatrix}^T$$

OTROS DESARROLLOS PARCIALES

Control óptimo con frontera Neumann:

Acoplando las ecuaciones en el tiempo se tiene un sistema lineal de gran porte, dado por:

$$H\hat{\mathbf{z}} + K\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{f}}$$

OTROS DESARROLLOS PARCIALES

Control óptimo con frontera Neumann:

$$J = \frac{q}{2}\left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*}\right)^T M \left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*}\right) + \frac{r}{2}\hat{\mathbf{v}}^T G\,\hat{\mathbf{v}}$$

$$\begin{cases} \min & J\left(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{v}}\right) \\ \text{sujeto a} & H\hat{\mathbf{z}} + K\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{f}} \end{cases}$$

OTROS DESARROLLOS PARCIALES

Control óptimo con frontera Neumann:

$$L\left(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathrm{p}\right) = \frac{q}{2}\left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*}\right)^T M \left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*}\right) + \frac{r}{2}\hat{\mathbf{v}}^T G\,\hat{\mathbf{v}} + \left\langle \mathrm{p}, H\hat{\mathbf{z}} + K\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathrm{f}}\right\rangle$$

Multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*}} &= q\,M\left(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{z}^*}\right) + H^T\,\mathrm{p} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \hat{\mathbf{v}}} &= r\,G\hat{\mathbf{v}} + K^T\,\mathrm{p} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \hat{\mathrm{p}}} &= H\hat{\mathbf{z}} + K\hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathrm{f}} &= 0
\end{aligned}$$

OTROS DESARROLLOS PARCIALES

Control óptimo con frontera Neumann:

$$\begin{bmatrix} q\,M & 0 & H^T \\ 0 & r\,G & K^T \\ H & K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{v}} \\ \mathrm{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q\,M\,\hat{\mathbf{z}}^* \\ 0 \\ \hat{\mathrm{f}} \end{bmatrix}$$

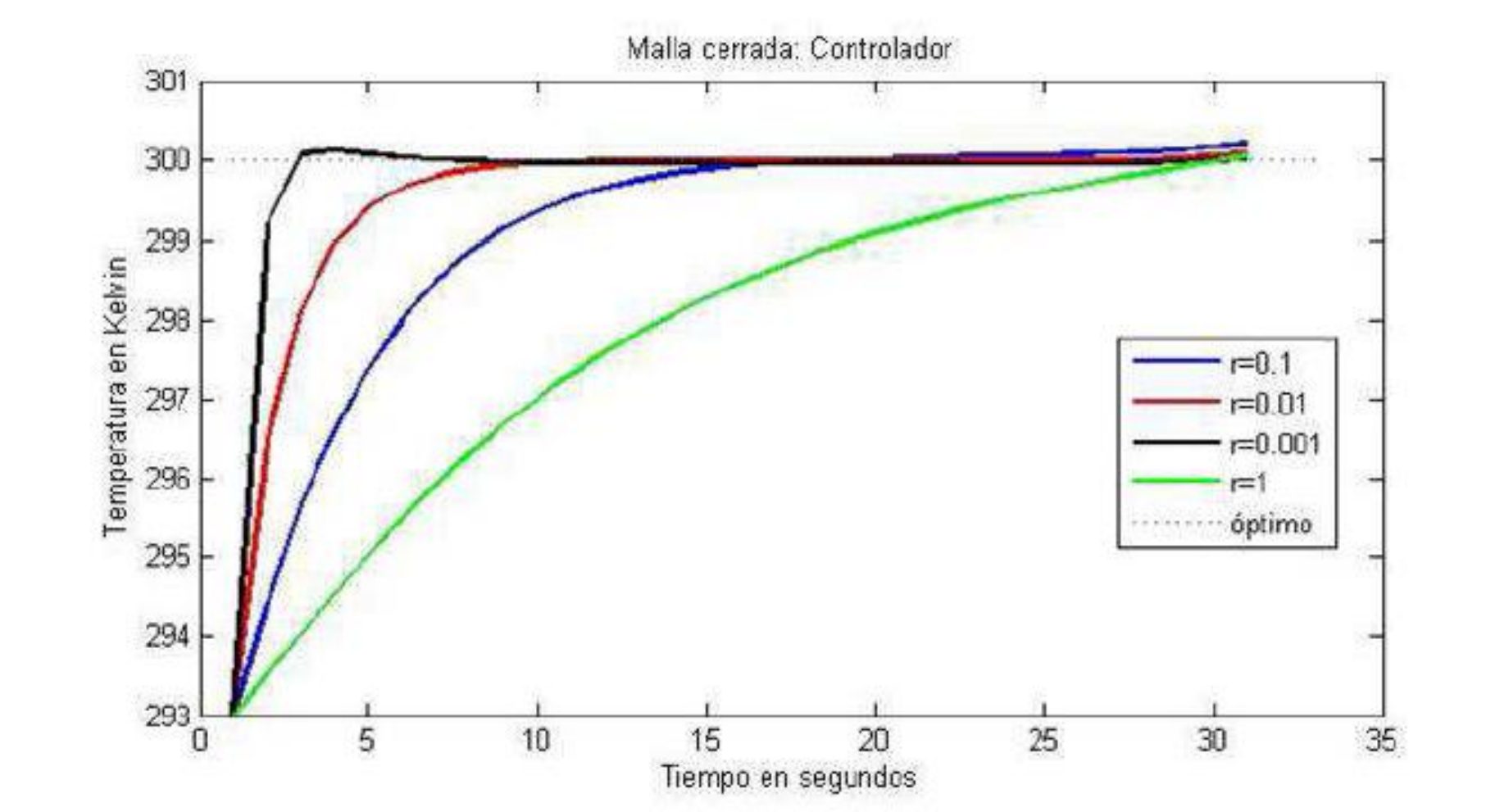
$$p = -q\,H^{-T}\,M\,\hat{\mathbf{z}} + q\,H^{-T}\,M\,\hat{\mathbf{z}}^*$$

$$\hat{\mathbf{z}} = H^{-1}\,\hat{\mathrm{f}} - H^{-1}\,K\,\hat{\mathrm{v}}$$

$$(r\,G + q\,K^T\,H^{-T}\,M\,H^{-1}\,K)\hat{\mathrm{v}} = -q\,K^T\,H^{-T}\,M\,\hat{\mathbf{z}}^* + q\,K^T\,H^{-T}\,M\,H^{-1}\,\hat{\mathrm{f}}$$

OTROS DESARROLLOS PARCIALES

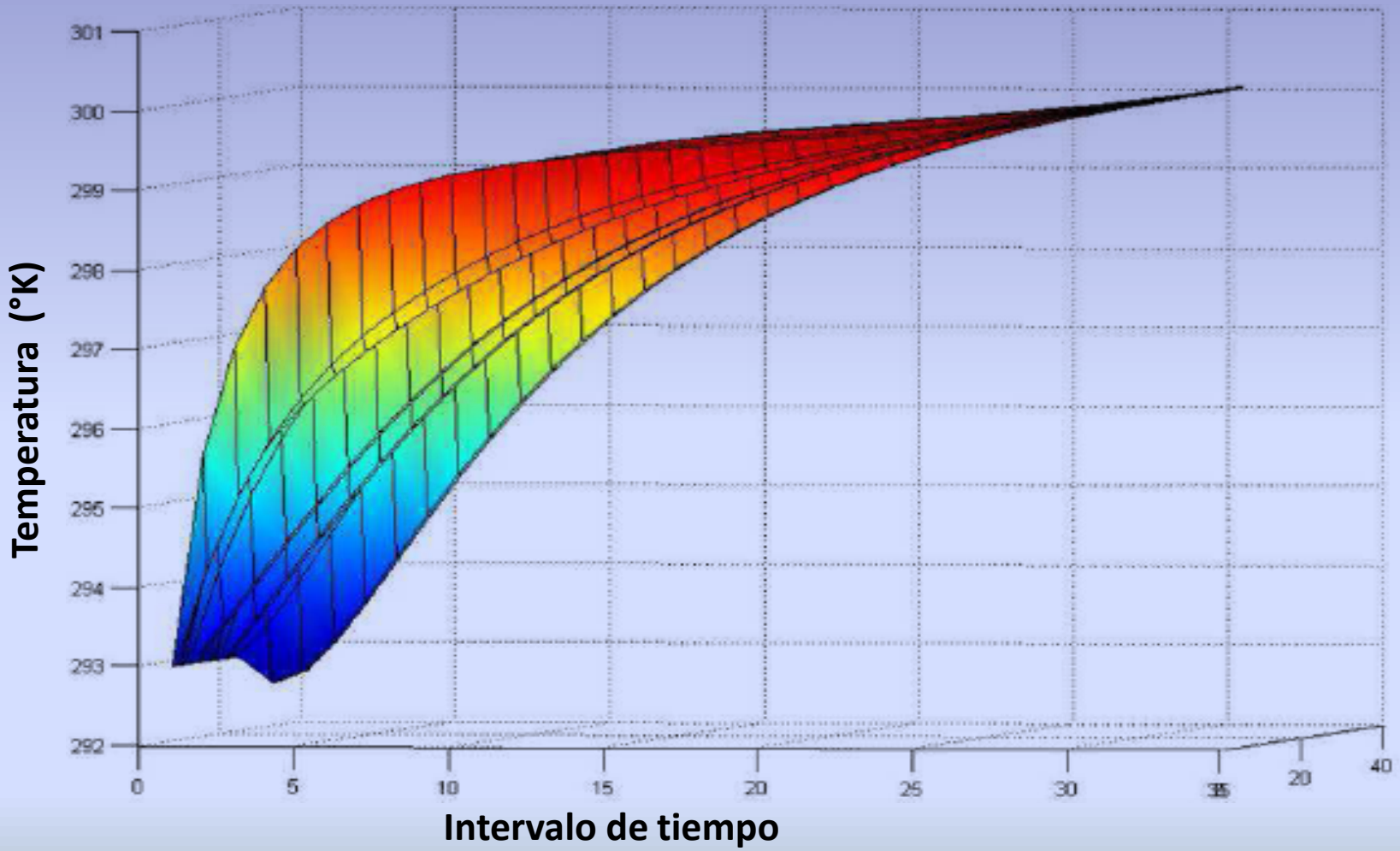
Control óptimo con frontera Neumann - Resultados



Evaluación del controlador para distintos valores de r para una temperatura óptima de 300 grados Kelvin.

OTROS DESARROLLOS PARCIALES

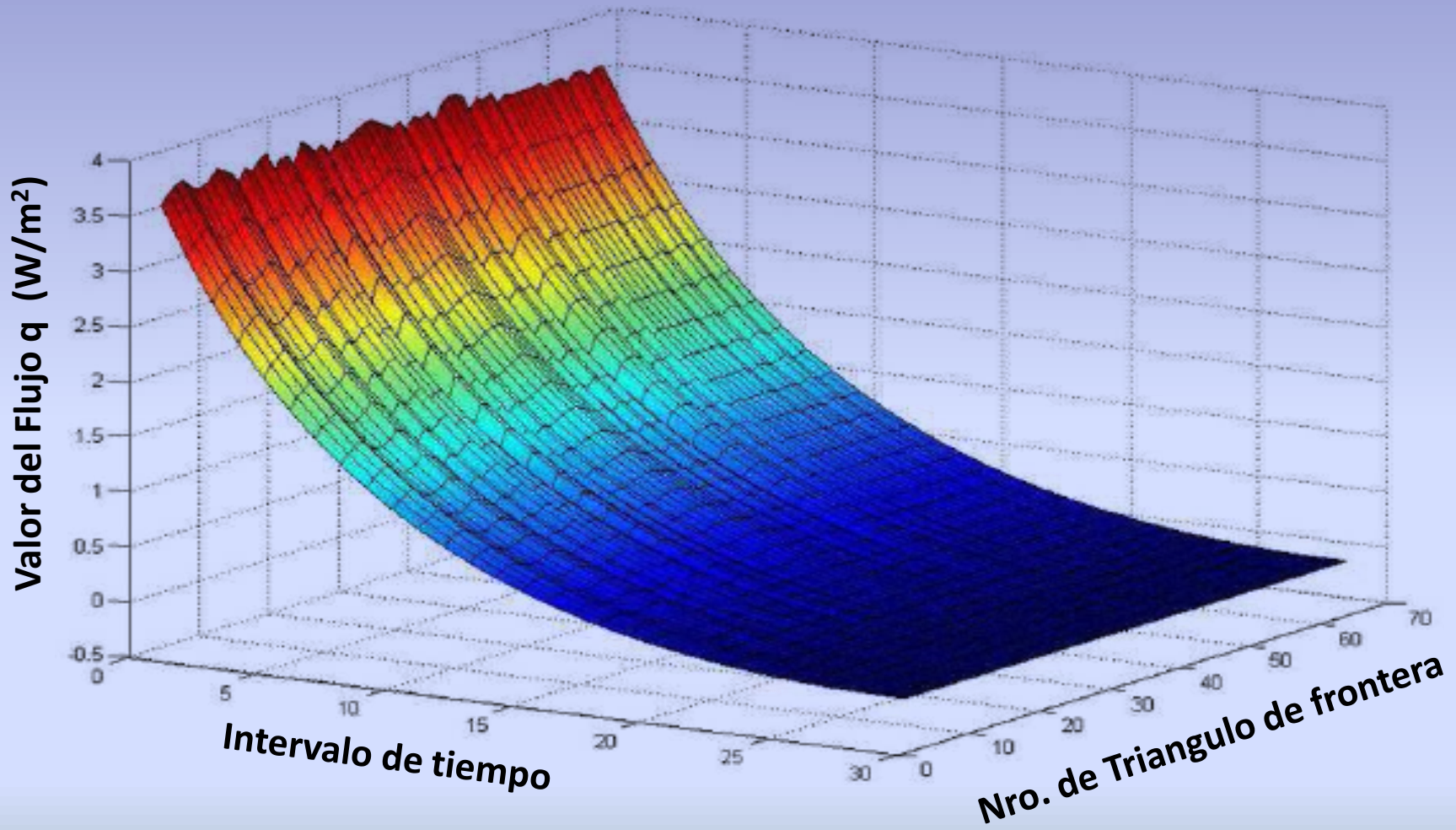
Control óptimo con frontera Neumann - Resultados



Transitorio térmico de los distintos puntos de la placa para el circuito con temperatura controlada.

OTROS DESARROLLOS PARCIALES

Control óptimo con frontera Neumann - Resultados



Valor del flujo de calor (variable de control) en los distintos triángulos de la frontera.

Contenido

- Motivación y relevancia del trabajo
- Modelado y discretización
- Implementación numérica
- Simulación
- Resultados de la simulación
- Control óptimo
- Resultados del control óptimo
- Otros desarrollos parciales
- **Conclusiones y trabajos futuros**

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos:

- Obtenido un método efectivo de simulación de sistemas térmicos, con condiciones convectivas de frontera.

- Validado el método de simulación, aplicándolo a un área de interés actual en investigación y desarrollo.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos:

- Desarrollado un método de control efectivo para sistemas térmicos de fronteras convectivas.

- Desarrollado e implementado métodos matriciales específicamente necesarios para el tipo de problema de optimización encarado.

PRESENTACIONES

- VII Seminario del Sector Eléctrico del Paraguay (SESEP) – CIGRÉ.

Titulo del Trabajo:

TRANSITORIO TÉRMICO EN CIRCUITOS ELECTRÓNICOS: SIMULACIÓN Y CONTROL

Carlos Antonio Galeano Ríos[1] - Mauricio José Poletti Merlo - Horacio Feliciangeli
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Asunción, Campus Universitario, San Lorenzo, Paraguay. E-mail: mauripoletti@gmail.com, grcarlosa@gmail.com[1]

Christian E. Schaerer
Facultad Politécnica, Universidad Nacional de Asunción, Campus Universitario, San Lorenzo, Paraguay. P.O. Box 2111 SL. Email: cschaer@pol.una.py

Resumen:
En el presente trabajo se presenta el control óptimo de la temperatura en un circuito electrónico sometido a fuentes internas de calor. Las fuentes modelan el calor generado por los componentes electrónicos en la placa. Las ecuaciones constitutivas son obtenidas modelando el circuito como una ecuación diferencial parabólica tridimensional donde los parámetros del circuito (calor específico, densidad y conductividad térmica) son considerados constantes por partes en el espacio.

Para simular el transitorio térmico (malla abierta), el dominio espacio-temporal es discretizado. Una formulación de elementos finitos *standard* es utilizada sobre la formulación variacional débil de forma a discretizar la ecuación en el dominio espacial. Para el dominio temporal es usada una formulación de Euler implícita. Condiciones de frontera de Robin son usadas para modelar el intercambio de calor por convección del aire en el medio, mientras que condiciones de Neumann modelan el sistema de enfriamiento de la placa. Los resultados de la simulación están de acuerdo a mediciones de laboratorio encontradas en la literatura.

Para diseñar el controlador, las condiciones de Neumann son consideradas como las variables de control y se define un problema de minimización con restricciones donde el funcional de desempeño es una función cuadrática lineal asociada al estado del sistema (temperatura) y la variable de control. Las condiciones de optimalidad aplicadas a este problema de minimización con restricciones conllevan a un sistema de ecuaciones indefinido de gran porte. Los resultados muestran que el sistema puede ser adecuadamente controlado y a priori permiten la elaboración de teoría sobre la controlabilidad térmica de circuitos. El software desarrollado permite además la simulación de diferentes configuraciones. Además, están en proceso de implementación algoritmos con menor costo computacional para la resolución del sistema de ecuaciones de gran porte. Esto último permitirá la simulación con una mayor precisión.

[1] Autor para contacto.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & & \mathbf{E} \\ & \mathbf{G} & \mathbf{N} \\ \mathbf{E} & \mathbf{N}^T & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{z}^{\nu-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} . \qquad (13)$$

Para resolver el sistema (13) usamos un método directo. Otros métodos más eficientes pueden ser implementados, vea por ejemplo [7] y las referencias en él incluidas.

5. RESULTADOS NUMERICOS

Consideramos una placa circuital de $7.5 \times 5 \times 0.15\,cm$. La conductividad térmica del cuerpo generador de calor λ_1 $1{,}5\,W/mK$, conductividad térmica de la placa λ_2 $240\,W/mK$, el coeficiente de convección para las caras superior e inferior $h = 17{,}8\,W/m^2K$, Producto de la densidad por el calor específico del cuerpo generador de calor $\rho_1 c_{p1}$ $1{,}67\,x10^7\,J/m^3K$ y producto de la densidad por el calor específico de la placa $\rho_2 c_{p2}$ $240\,x10^4\,J/m^3K$. El calor disipado del cuerpo generador es $9{,}4\ W$. La placa tiene en su centro una fuente generadora de calor rectangular de $2 \times 1 \times 0.075\,cm$. En [4], esta fuente fue simulada agregando a una zona de la frontera un flujo de calor por medio de condiciones de Neumann.

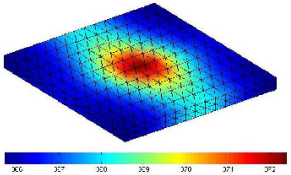
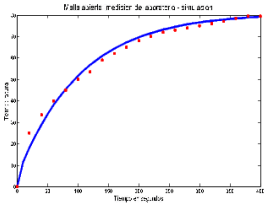


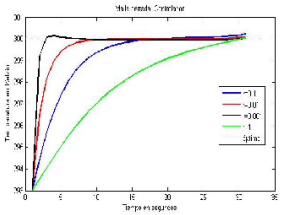
Figura 1: Malla abierta a los 400 segundos de simulación.

Caso 1. Para reproducir los resultados presentados en [4] consideramos en los bordes de la placa condiciones de frontera adiabáticas. La dirección con mayor gradiente es debido a la proximidad física de la frontera a la fuente (Figura 1). En la Figura 2, se presenta una comparación entre el resultado obtenido en laboratorio (extraído de [4]) y el resultado

do con la simulación. Puede notarse que con las simplificaciones, los resultados icos obtenidos están en concordancia con los resultados obtenidos en laboratorio. De rma, se observa que el modelo captura eficientemente la física del problema.



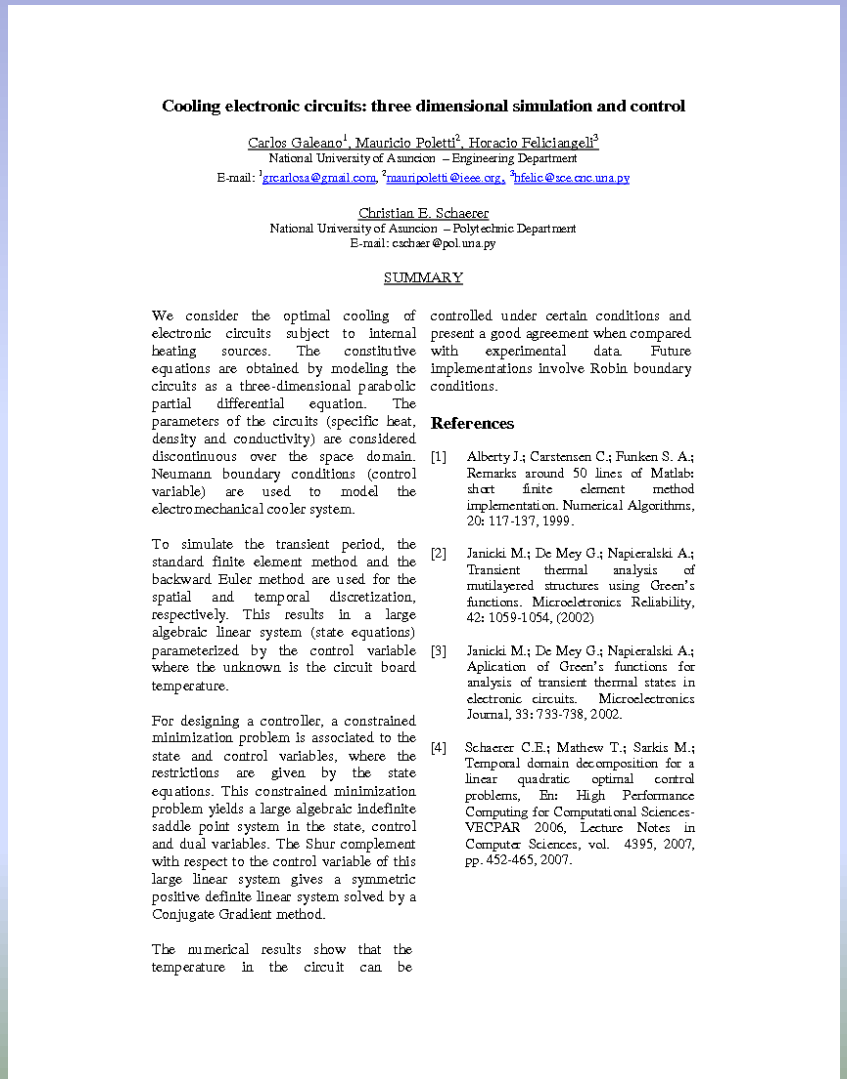
a 2: Malla abierta. Perfil de temperatura en el centro de la placa. Las marcas representan ediciones de laboratorio extraídas de [4]. La línea continua muestra el resultado de la simulación.



ura 3: Malla cerrada. Temperatura en el centro de la placa para diferentes valores de r.

PRESENTACIONES

- Workshop de Energía y Medio Ambiente – UNA



Cooling electronic circuits: three dimensional simulation and control

Carlos Galeano[1], Mauricio Poletti[2], Horacio Feliciangeli[3]
National University of Asuncion – Engineering Department
E-mail: [1]grcarlosa@gmail.com, [2]mauripoletti@ieee.org, [3]hfelic@sce.cnc.una.py

Christian E. Schaerer
National University of Asuncion – Polytechnic Department
E-mail: cschaer@pol.una.py

SUMMARY

We consider the optimal cooling of electronic circuits subject to internal heating sources. The constitutive equations are obtained by modeling the circuits as a three-dimensional parabolic partial differential equation. The parameters of the circuits (specific heat, density and conductivity) are considered discontinuous over the space domain. Neumann boundary conditions (control variable) are used to model the electromechanical cooler system.

To simulate the transient period, the standard finite element method and the backward Euler method are used for the spatial and temporal discretization, respectively. This results in a large algebraic linear system (state equations) parameterized by the control variable where the unknown is the circuit board temperature.

For designing a controller, a constrained minimization problem is associated to the state and control variables, where the restrictions are given by the state equations. This constrained minimization problem yields a large algebraic indefinite saddle point system in the state, control and dual variables. The Shur complement with respect to the control variable of this large linear system gives a symmetric positive definite linear system solved by a Conjugate Gradient method.

The numerical results show that the temperature in the circuit can be controlled under certain conditions and present a good agreement when compared with experimental data. Future implementations involve Robin boundary conditions.

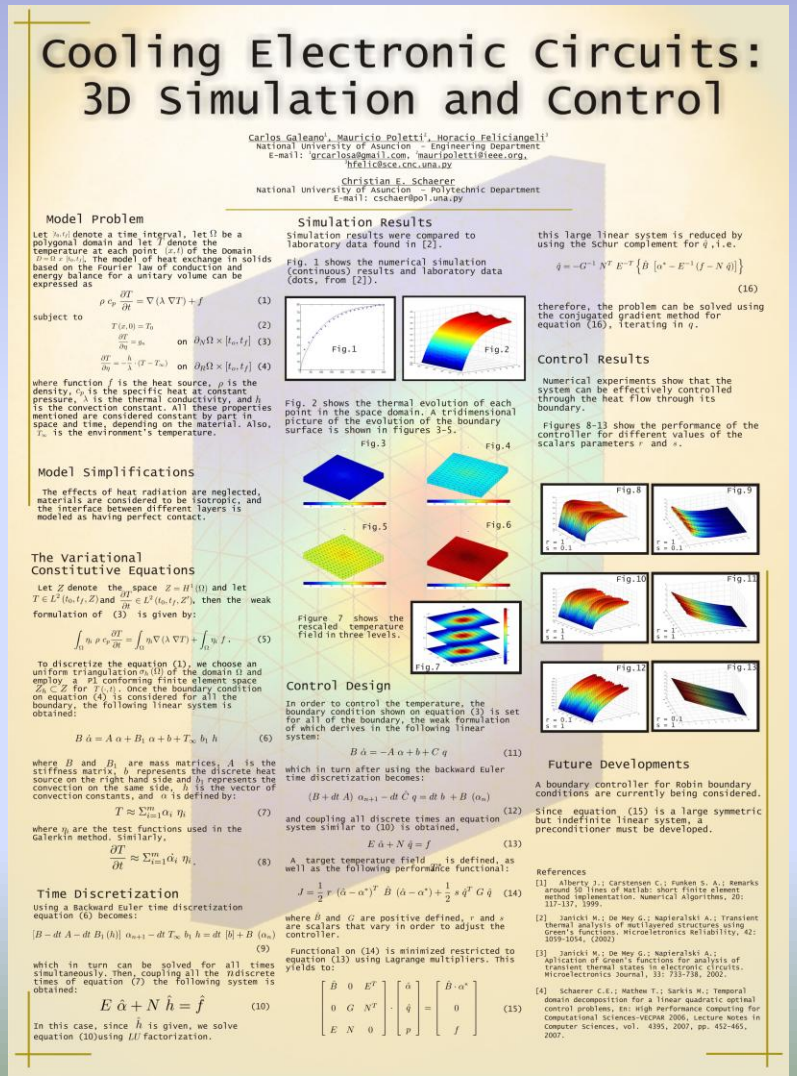
References

[1] Alberty J.; Carstensen C.; Funken S. A.; Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. Numerical Algorithms, 20: 117-137, 1999.

[2] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; Transient thermal analysis of mutilayered structures using Green's functions. Microeletronics Reliability, 42: 1059-1054, (2002)

[3] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; Aplication of Green's functions for analysis of transient thermal states in electronic circuits. Microelectronics Journal, 33: 733-738, 2002.

[4] Schaerer C.E.; Mathew T.; Sarkis M.; Temporal domain decomposition for a linear quadratic optimal control problems, En: High Performance Computing for Computational Sciences-VECPAR 2006, Lecture Notes in Computer Sciences, vol. 4395, 2007, pp. 452-465, 2007.



Cooling Electronic Circuits: 3D Simulation and Control

Carlos Galeano[1], Mauricio Poletti[1], Horacio Feliciangeli[1]
National University of Asuncion – Engineering Department
E-mail: [1]grcarlosa@gmail.com, [1]mauripoletti@ieee.org, [1]hfelic@sce.cnc.una.py

Christian E. Schaerer
National University of Asuncion – Polytechnic Department
E-mail: cschaer@pol.una.py

Model Problem

Let $\lambda_n(t)$ denote a time interval, let Ω be a polygonal domain and let $\mathcal{T}$ denote the temperature at each point (x,t) of the Domain $\mathcal{D}=\Omega \times \lambda_n(t)$. The model of heat exchange in solids based on the Fourier law of conduction and energy balance for a unitary volume can be expressed as

$$\rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda\, \nabla T) + f \quad (1)$$

subject to

$$T(x,0) = T_0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = g_n \quad \text{on } \partial_N \Omega \times [t_m, t_f] \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{h}{\lambda}(T - T_\infty) \quad \text{on } \partial_R \Omega \times [t_m, t_f] \quad (4)$$

where function f is the heat source, ρ is the density, c_p is the specific heat at constant pressure, λ is the thermal conductivity, and h is the convection constant. All these properties mentioned are considered constant by part in space and time, depending on the material. Also, T_∞ is the environment's temperature.

Model Simplifications

The effects of heat radiation are neglected, materials are considered to be isotropic, and the interface between different layers is modeled as having perfect contact.

The Variational Constitutive Equations

Let $\mathcal{Z}$ denote the space $\mathcal{Z} = H^1(\Omega)$ and let $T \in L^2(t_0, t_f, \mathcal{Z})$ and $\frac{\partial T}{\partial t} \in L^2(t_0, t_f, \mathcal{Z}')$, then the weak formulation of (3) is given by:

$$\int_\Omega \eta_i\, \rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \int_\Omega \eta_i \nabla(\lambda\, \nabla T) + \int_\Omega \eta_i\, f. \quad (5)$$

To discretize the equation (1), we choose an uniform triangulation $\sigma_h(\Omega)$ of the domain Ω and employ a P1 conforming finite element space $\mathcal{Z}_h \subset \mathcal{Z}$ for $\mathcal{T}(t)$. Once the boundary condition on equation (4) is considered for all the boundary, the following linear system is obtained:

$$B\, \dot{\alpha} = A\, \alpha + B_1\, \alpha + b + T_\infty\, b_1\, h \quad (6)$$

where B and B_1 are mass matrices, A is the stiffness matrix, b represents the discrete heat source on the right hand side and b_1 represents the convection on the same side, h is the vector of convection constants, and α is defined by:

$$T \approx \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i\, \eta_i \quad (7)$$

where η_i are the test functions used in the Galerkin method. Similarly,

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \Sigma_{i=1}^{m} \dot{\alpha}_i\, \eta_i. \quad (8)$$

Time Discretization

Using a Backward Euler time discretization equation (6) becomes:

$$[B - dt\, A - dt\, B_1(h)]\, \alpha_{n+1} - dt\, T_\infty\, b_1\, h = dt\, [b] + B\, (\alpha_n) \quad (9)$$

which in turn can be solved for all times simultaneously. Then, coupling all the n discrete times of equation (7) the following system is obtained:

$$E\, \hat{\alpha} + N\, \hat{h} = \hat{f} \quad (10)$$

In this case, since $\hat{h}$ is given, we solve equation (10) using LU factorization.

Simulation Results

Simulation results were compared to laboratory data found in [2].

Fig. 1 shows the numerical simulation (continuous) results and laboratory data (dots, from [2]).

Fig. 2 shows the thermal evolution of each point in the space domain. A tridimensional picture of the evolution of the boundary surface is shown in figures 3-5.

Figure 7 shows the rescaled temperature field in three levels.

Control Design

In order to control the temperature, the boundary condition shown on equation (3) is set for all of the boundary, the weak formulation of which derives in the following linear system:

$$B\, \dot{\alpha} = -A\, \alpha + b + C\, q \quad (11)$$

which in turn after using the backward Euler time discretization becomes:

$$(B + dt\, A)\, \alpha_{n+1} - dt\, C\, q = dt\, b + B\, (\alpha_n) \quad (12)$$

and coupling all discrete times an equation system similar to (10) is obtained,

$$E\, \hat{\alpha} + N\, \hat{q} = f \quad (13)$$

A target temperature field is defined, as well as the following performance functional:

$$J = \frac{1}{2} r\, (\hat{\alpha} - \alpha^*)^T\, \hat{B}\, (\hat{\alpha} - \alpha^*) + \frac{1}{2} s\, \hat{q}^T\, G\, \hat{q} \quad (14)$$

where $\hat{B}$ and G are positive defined, r and s are scalars that vary in order to adjust the controller.

Functional on (14) is minimized restricted to equation (13) using Lagrange multipliers. This yields to:

$$\begin{bmatrix} \hat{B} & 0 & E^T \\ 0 & G & N^T \\ E & N & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{q} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B} \cdot \alpha^* \\ 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (15)$$

this large linear system is reduced by using the Schur complement for $\hat{q}$, i.e.

$$\hat{q} = -G^{-1}\, N^T\, E^{-T} \left\{ \hat{B}\, [\alpha^* - E^{-1}(f - N\, \hat{q})] \right\} \quad (16)$$

therefore, the problem can be solved using the conjugated gradient method for equation (16), iterating in q.

Control Results

Numerical experiments show that the system can be effectively controlled through the heat flow through its boundary.

Figures 8-13 show the performance of the controller for different values of the scalars parameters r and s.

Future Developments

A boundary controller for Robin boundary conditions are currently being considered.

Since equation (15) is a large symmetric but indefinite linear system, a preconditioner must be developed.

References

[1] Alberty J.; Carstensen C.; Funken S. A.; Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element method implementation. Numerical Algorithms, 20: 117-137, 1999.

[2] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; Transient thermal analysis of mutilayered structures using Green's functions. Microeletronics Reliability, 42: 1059-1054, (2002)

[3] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; Aplication of Green's functions for analysis of transient thermal states in electronic circuits. Microelectronics Journal, 33: 733-738, 2002.

[4] Schaerer C.E.; Mathew T.; Sarkis M.; Temporal domain decomposition for a linear quadratic optimal control problems, En: High Performance Computing for Computational Sciences-VECPAR 2006, Lecture Notes in Computer Sciences, vol. 4395, 2007, pp. 452-465, 2007.

PRESENTACIONES

- XXXII Congreso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2009) - SBMAC.

Robin optimal boundary control for cooling electronic circuits

Carlos A. Galeano, Mauricio J. Poletti, Horacio Feliciangeli
National University of Asuncion - Department of Engineering,
San Lorenzo, Paraguay
E-mail: grcarlosa@gmail.com, mauripoletti@ieee.org, hfelic@sce.cnc.una.py

Christian E. Schaerer
National University of Asuncion - Polytechnical Department
2111 SL, San Lorenzo, Paraguay
E-mail: cschaer@pol.una.py

ABSTRACT

We consider the optimal cooling of an electronic circuit plate, which is subject to intern heating sources. The constitutive equations are obtained by modeling the circuit as a parabol partial differential equation. The properties of the materials (specific heat, density and co ductivity), are constant by part over the space domain. Robin boundary conditions (contr variable) are used to model the convective electromechanical cooler system.

To simulate the transient period, the standard finite element method, and the backwa Euler method are used for the spatial and temporal discretizations, respectively. This results a large linear system (state equations) parameterized by the control variable where the unknow is the temperature of the circuit plate.

To design a controller, we define a constrained minimization problem where a linearize quadratic cost function is associated to the state and control variables, and the restrictions a given by the state equations. This constrained minimization problem yields a large nonline system of equations in the state, control and dual variables. This nonlinear equation is solve using an iterative method with relaxation for the control variable.

Comparisons between numerical results and experimental data found in the literature sho that the temperature in the circuit can be controlled effectively with high precision.

Keywords: *Parabolic PDE, Robin Boundary Condition, Optimal Control*

Referências

[1] J. Alberty, C. Carstensen, S. A. Funken, Remarks around 50 lines of Matlab: Short fini element method implementation, *Numerical Algorithms*, 20 (1999) 117-137.

[2] M. Janicki, G. De Mey, A. Napieralski, Aplication of Green's functions for analysis transient thermal states in electronic circuits, *Microelectronics Journal*, 33 (2002) 733-73

[3] M. Janicki, G. De Mey, A. Napieralski, Transient thermal analysis of multilayered structur using Green's functions, *Microelectronics Reliability*, 42 (2002) 1059-1064.

[4] C. E. Schaerer, T. Mathew, M. Sarkis, Block iterative algorithms for the solution parabolic optimal control problems, *Lecture Notes in Computer Science*, 4395 (2007) 45 465.

THIS IS A HANDOUT FOR THE CNMAC-2009

Robin Optimal Boundary Control for Cooling Electronic Circuits

Carlos Galeano[1], Mauricio Poletti, Horacio Feliciangeli, Christian Schaerer[2], Universidad Nacional de Asunción, Campus de la UNA, San Lorenzo - Paraguay.

ABSTRACT. We consider the optimal cooling of an electronic circuit plate subject to internal heating sources. The constitutive equations are obtained by modeling the circuit as a parabolic partial differential equation with discontinuous coefficients. Robin boundary conditions are used to model the convective cooler system. The discretization of the model is performed using a standard finite element method and the backward Euler method resulting in a large linear system which is parameterised by the control variable.

To determine the control variable, an optimal control problem - OCP - is defined where the cost function associates the temperature in system and control variables and the restrictions are given by the state equations. This OCP yields a large nonlinear system of equations, which is solved using a Newton method. Numerical results show that the temperature in the circuit can be controlled effectively.

1. Introduction

Let $[t_0, t_f]$ denote a time interval, let Ω be a polygonal domain and let T denote the temperature at each point (x,t) of the Domain $D = \Omega \times [t_0, t_f]$. The model of heat exchange in solids based on the Fourier law of conduction and energy balance for a unitary volume can be expressed as:

$$\rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\left[\lambda \nabla T\right] + f, \tag{1.1}$$

subject to $T(x,0) = T_0$ and $\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{h}{\lambda}(T - T_{\infty})$ where f is the heat source, ρ is the density, c_p is the specific heat at constant pressure, λ is the thermal conductivity and h is the convection constant. All these properties mentioned are considered constant by part in space and time. T_{∞} is the temperature of the environment, and h is the control variable.

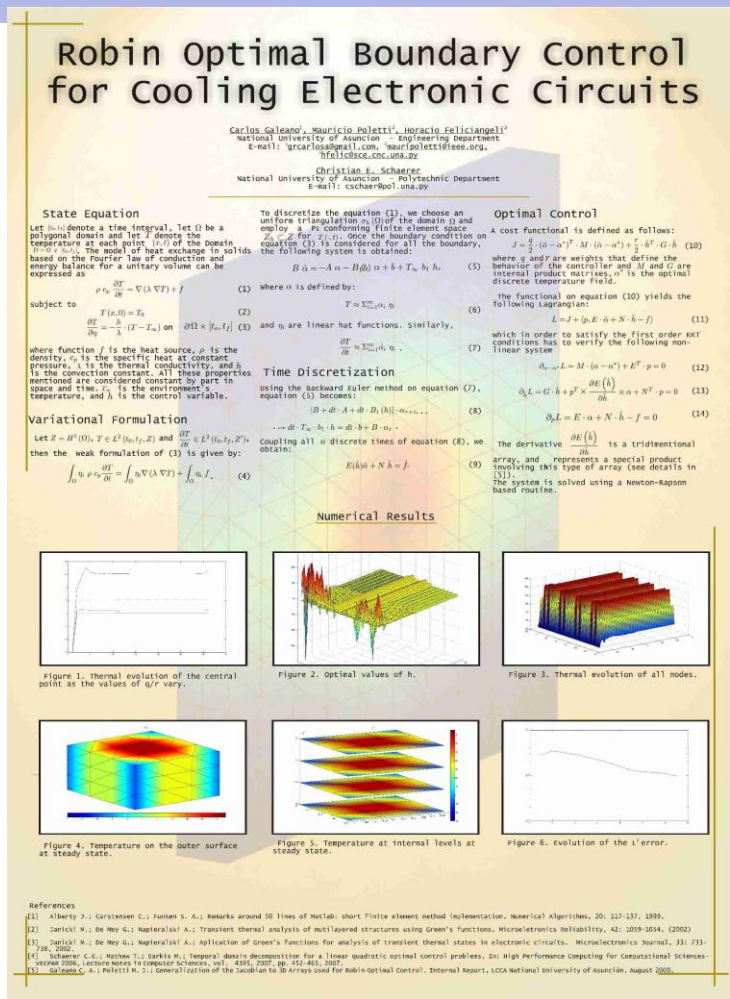
To obtain the variational formulation, let $Z = H^1(\Omega)$, $T \in L^2(t_0, t_f, Z)$ and $\frac{\partial T}{\partial t} \in L^2(t_0, t_f, Z')$, then the weak formulation of 1.1 is:

$$\int_{\Omega} \eta_i\, \rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \int_{\Omega} \eta_i \nabla\left[\lambda \nabla T\right] + \int_{\Omega} \eta_i\, f \tag{1.2}$$

To discretize equation 1.2, we choose an uniform triangulation $\sigma_h(\Omega)$ of the domain Ω and employ a P1 conforming finite element space $Z_h \subset Z$ for $T(\cdot,t)$. Once the boundary condition on equation (1.1) is considered for all the boundary, the following system is obtained:

$$B\,\dot{\alpha} = -A\,\alpha - B_1(h)\,\alpha + b + T_{\infty}\, b_1\, h, \tag{1.3}$$

[1]Ingeniería. Email: grcarlosa@gmail.com, mauripoletti@ieee.org, hfelic@sce.cnc.una.py
[2]Politécnica. Email: cschaer@pol.una.py



Robin Optimal Boundary Control for Cooling Electronic Circuits

Carlos Galeano[1], Mauricio Poletti[1], Horacio Feliciangeli[1]
National University of Asuncion - Engineering Department
E-mail: [1]grcarlosa@gmail.com, [1]mauripoletti@ieee.org, hfelic@sce.cnc.una.py

Christian E. Schaerer
National University of Asuncion - Polytechnic Department
E-mail: cschaer@pol.una.py

State Equation

Let $[t_0, t_f]$ denote a time interval, let Ω be a polygonal domain and let T denote the temperature at each point (x,t) of the Domain $D = \Omega \times [t_0, t_f]$. The model of heat exchange in solids based on the Fourier law of conduction and energy balance for a unitary volume can be expressed as

$$\rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\left(\lambda \nabla T\right) + f \tag{1}$$

subject to

$$T(x,0) = T_0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{h}{\lambda}\cdot(T - T_{\infty}) \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times [t_0, t_f] \tag{3}$$

where function f is the heat source, ρ is the density, c_p is the specific heat at constant pressure, λ is the thermal conductivity, and h is the convection constant. All these properties mentioned are considered constant by part in space and time. T_{∞} is the environment's temperature, and h is the control variable.

Variational Formulation

Let $Z = H^1(\Omega)$, $T \in L^2(t_0, t_f, Z)$ and $\frac{\partial T}{\partial t} \in L^2(t_0, t_f, Z')$, then the weak formulation of (3) is given by:

$$\int_{\Omega} \eta_i\, \rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \int_{\Omega} \eta_i \nabla\left(\lambda \nabla T\right) + \int_{\Omega} \eta_i\, f. \tag{4}$$

To discretize the equation (1), we choose an uniform triangulation $\sigma_h(\Omega)$ of the domain Ω and employ a P_1 conforming finite element space $Z_h \subset Z$ for $T(\cdot,t)$. Once the boundary condition on equation (3) is considered for all the boundary, the following system is obtained:

$$B\,\dot{\alpha} = -A\,\alpha - B_1(h)\,\alpha + b + T_{\infty}\, b_1\, h, \tag{5}$$

where α is defined by:

$$T \approx \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i\, \eta_i \tag{6}$$

and η_i are linear hat functions. Similarly,

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \Sigma_{i=1}^{m} \dot{\alpha}_i\, \eta_i\,. \tag{7}$$

Time Discretization

Using the backward Euler method on equation (7), equation (5) becomes:

$$\left[B + dt\cdot A + dt\cdot B_1(h)\right]\cdot \alpha_{j+1} = \ldots \tag{8}$$

$$\ldots + dt\cdot T_{\infty}\cdot b_1\cdot h = dt\cdot b + B\cdot \alpha_j\,.$$

Coupling all n discrete times of equation (8), we obtain:

$$E(h)\,\dot{\alpha} + N\,h = \bar{f}. \tag{9}$$

To discretize the equation (1), we choose an uniform triangulation $\sigma_h(\Omega)$ of the domain Ω and employ a P_1 conforming finite element space $Z_h \subset Z$ for $T(\cdot,t)$. Once the boundary condition on equation (3) is considered for all the boundary, the following system is obtained:

Optimal Control

A cost functional is defined as follows:

$$J = \frac{q}{2}\cdot(\alpha - \alpha^*)^T \cdot M \cdot (\alpha - \alpha^*) + \frac{r}{2}\cdot h^T \cdot G \cdot h \tag{10}$$

where q and r are weights that define the behavior of the controller and M and G are internal product matrixes, α^* is the optimal discrete temperature field.

The functional on equation (10) yields the following Lagrangian:

$$L = J + \langle p, E\cdot\dot{\alpha} + N\cdot h - f\rangle \tag{11}$$

which in order to satisfy the first order KKT conditions has to verify the following non-linear system

$$\partial_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} L = M\cdot(\alpha - \alpha^*) + E^T \cdot p = 0 \tag{12}$$

$$\partial_h L = G\cdot h + p^T \times \frac{\partial E(\dot{h})}{\partial h} \times \alpha + N^T \cdot p = 0 \tag{13}$$

$$\partial_p L = E\cdot\alpha + N\cdot h - f = 0 \tag{14}$$

The derivative $\frac{\partial E(\dot{h})}{\partial h}$ is a tridimentional array, and represents a special product involving this type of array (see details in [5]).
The system is solved using a Newton-Rapson based routine.

Numerical Results

Figure 1. Thermal evolution of the central point as the values of q/r vary.

Figure 2. Optimal values of h.

Figure 3. Thermal evolution of all nodes.

Figure 4. Temperature on the outer surface at steady state.

Figure 5. Temperature at internal levels at steady state.

Figure 6. Evolution of the L'error.

References

[1] Alberty J.; Carstensen C.; Funken S. A.; Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element method implementation. Numerical Algorithms, 20: 117-137, 1999.

[2] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; Transient thermal analysis of multilayered structures using Green's functions. Microeletronics Reliability, 42: 1059-1064, (2002)

[3] Janicki M.; De Mey G.; Napieralski A.; Aplication of Green's functions for analysis of transient thermal states in electronic circuits. Microelectronics Journal, 33: 733-738, 2002.

[4] Schaerer C.E.; Mathew T.; Sarkis M.; Temporal domain decomposition for a linear quadratic optimal control problem, In: High Performance Computing for Computational Sciences-VECPAR 2006, Lecture Notes in Computer Sciences, vol: 4395, 2007, pp. 452-465, 2007.

[5] Galeano C. A.; Poletti M. J.; Generalization of the Jacobian to 3D Arrays used for Robin Optimal Control. Internal Report, LCCA National University of Asunción, August 2009.

PRESENTACIONES

- Workshop de Tesis, ETyC - FPUNA

MALLA CERRADA

Utilizando el Lagrangiano discreto:

$$L_h(\mathbf{z},\mathbf{h},\mathbf{p}) = \left(\mathbf{h}^T G\mathbf{h} + (\mathbf{z}-\mathbf{z}_*)^T M(\mathbf{z}-\mathbf{z}_*)\right) + \mathbf{p}^T\left(E(\mathbf{h})\mathbf{z} + N\mathbf{h} - \mathbf{f}\right)$$

Luego satisfaciendo la condición de mínimo nos queda el siguiente problema no lineal:

$$\partial_{z-z^*} L = \mathbf{M}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) + \mathbf{E}(\mathbf{h})^{\mathbf{T}}\mathbf{p} = 0$$

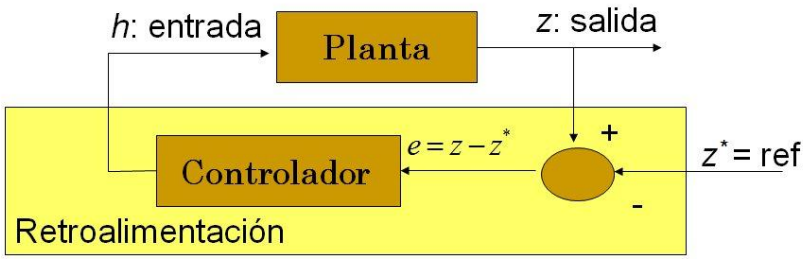
$$\partial_h L = \mathbf{G}\mathbf{h} + \mathbf{p}^{\mathbf{T}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{h}} \times \mathbf{z} + \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\mathbf{p} = 0$$

$$\partial_p L = \mathbf{E}(\mathbf{h})\mathbf{z} + \mathbf{N}\mathbf{h} - \mathbf{f} = 0$$

Donde $\partial E / \partial h$ es un arreglo tri-dimensional y $\times$ representa producto utilizado en este tipo de arreglos.

Resolvemos el problema utilizando el método de Newton-Ra

EL PROBLEMA DE CONTROL ROBIN NO LINEAL



z: vector de estado y salida

Planta $\Rightarrow$ $\begin{cases} M\dfrac{d\underline{z}}{dt} = \left(-A - D(\underline{h})\right)\underline{z} + T_\infty B\underline{h} + \underline{b} \\ \underline{z}(0) = z_o, \end{cases}$

Lo que buscamos es que la salida z se comporte como una salida dada z^*

h: debe ser escogida de manera tal que "*e*" sea pequeño.

FUTUROS DESARROLLOS

- Desarrollo de métodos que optimicen el uso de memoria para la realización de los cálculos.

- Implementación de computación paralela para la resolución de este y de otros problemas de optimización similares.

- Aplicación del método desarrollado en el presente trabajo a otros problemas de ingeniería relativos a la disipación de calor.

FUTUROS DESARROLLOS

- Utilización de métodos basados en subespacios de Krylov para la resolución de las iteraciones de Newton-Raphson.

- Imposición de restricciones de optimalidad asociadas a inecuaciones.

- Adecuada adimensionalización de las ecuaciones utilizadas y solución de sensibilidad a datos, para evitar problemas numéricos.

FUTUROS DESARROLLOS

- Generación de software de interfaz amigable que permita simular casos prácticos.

- Integración de simulaciones eléctrico-mecánico-térmicas.

Gracias por su atención